Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

3. Übung zur Algebra 1, WS 04/05

Aufgabe 1: (*10 Punkte*) Welche der H_i sind normale Untergruppen in G_i?

i)	$H_1 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23), id\}$,	$G_1 = S_4$
ii)	$H_2 = \langle (12), (34) \rangle$,	$G_2 = S_4$
iii)	$H_3 = \langle g^2 \mid g \in G \rangle$,	G eine beliebige Gruppe
iv)	$H_4 = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c \in \mathbb{Q},\ ac \neq 0 \}$,	$G_4 = \mathrm{Gl}(2,\ \mathbb{Q})$
v)	$H_5 = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid b \in \mathbb{Q} \}$,	$G_5 = H_4$
vi)	$H_6 = H_5$,	$G_6 = G_4$

Aufgabe 2: (*10 Punkte*) Sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Aut}(G)$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition.

(ii) Sei $g \in G$. Dann ist

$$\begin{aligned} \kappa_g : G &\longrightarrow G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

ein Automorphismus.

(iii) $\kappa : g \mapsto \kappa_g$ definiert einen Homomorphismus von G nach $\mathrm{Aut}(G)$.

(iv) $\ker(\kappa) = Z(G)$.

(v) Die Menge der inneren Automorphismen $\mathrm{Inn}(G) := \mathrm{Im}\ (\kappa)$ ist eine normale Untergruppe in $\mathrm{Aut}(G)$.

Aufgabe 3: (*20 Punkte*) Ein *Graph* Γ ist die disjunkte Vereinigung zweier Mengen $V = V(\Gamma) \neq \emptyset$ und $E = E(\Gamma)$ zusammen mit zwei Abbildungen $\iota,\ \tau : E \longrightarrow V$. Die Elemente von V heißen *Knoten* von Γ und die Elemente von E *(orientierte) Kanten* von Γ. Für ein Element $e \in E$ heißen die Knoten $\iota(e)$ und $\tau(e)$ *Aufknoten* und *Endknoten* einer Kante. Eine Kante wird üblicherweise beschrieben durch:

$$\iota(e) \bullet\!\xrightarrow{\quad e \quad}\!\bullet\ \tau(e)$$

Seien $n \in \mathbb{N}$ und G eine Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Der *Cayley–Graph* $\Gamma = \Gamma(G, X)$ ist wie folgt definiert:

Die Knotenmenge ist die Menge aller Elemente von G, die Kantenmenge ist $E(\Gamma) = G \times X$ und die beiden Abbildungen sind gegeben durch $\iota(g,x) = g$ und $\tau(g,x) = gx$ für alle $(g,x) \in E(\Gamma)$.

Zeichnen Sie (möglichst überschneidungsfrei) die Cayley-Graphen für die folgenden Gruppen G mit neutralem Element e und Erzeugendensystem X:

(i) die zyklische Gruppe C_3 mit drei Elementen,

(ii) die zyklische Gruppe C_∞ mit unendlich vielen Elementen,

(iii) die Kleinsche Vierergruppe V_4 mit Erzeugenden $\{a,b\}$ und Relationen $a^2 = b^2 = e$ und $ab = ba$,

(iv) die Gruppe $G = \mathbb{Z} \rtimes C_2$, die von $X = \{x,t\}$ erzeugt wird mit den definierenden Relationen $t^2 = e$ und $txt^{-1} = x^{-1}$,

(v) die Diedergruppe $G = C_5 \rtimes C_2$ erzeugt von $X = \{\sigma, \tau\}$ mit den definierenden Relationen $\sigma^5 = e$ und $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$,

(vi) die Gruppe $G = \mathbb{Z}^2$ erzeugt von der Standardbasis,

(vii) die symmetrische Gruppe $G = S_4$ mit $X = \{(1234), (123)\}$ und den bekannten Relationen.

Abgabe am 11.11.04 vor der Vorlesung