Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

6. Übung zur Algebra 1, WS 04/05

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)

(i) Zeigen Sie, daß alle Gruppen der Ordnung 292 auflösbar sind.

(ii) Zeigen Sie, daß es keine einfache Gruppe der Ordnung 700 gibt.

Aufgabe 2: (*10 Punkte*) Seien p, q verschiedene Primzahlen mit $q < p$ und G eine Gruppe mit $|G| = pq$.

(i) Wieviele Elemente der Ordnung p, q und pq enthält G, und wieviele Sylowgruppen der Ordnung p bzw. q gibt es, falls

(a) G abelsch ist?

(b) G nicht abelsch ist?
Welche Bedingung ergibt sich hier für p?

(ii) Zeigen Sie (ohne Verwendung des allgemeineren in der Vorlesung angegebenen Satzes), daß G auflösbar ist.

Aufgabe 3: (*20 Punkte*) Seien $V \neq \{0\}$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und G eine Gruppe, die auf V linear operiert, d.h. für jedes $g \in G$ ist $v \mapsto gv$ linear. Ein $0 \neq v \in V$ heißt *Eigenvektor* von G genau dann, wenn für alle $g \in G$ ein $\chi(g) \in \mathbb{C}$ existiert mit $gv = \chi(g)v$.
Zeigen Sie:

(i) Sei $v \in V$ ein Eigenvektor von G, dann ist $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ein Homomorphismus.

(ii) Für alle $\chi \in \operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ ist

$$V_\chi := \{v \in V \mid gv = \chi(g)v \ \forall g \in G\}$$

ein Untervektorraum von V.

(iii) Für verschiedene $\chi_1, \dots, \chi_r \in \operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ ist

$$\sum_{i=1}^{r} V_{\chi_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} V_{\chi_i} \ .$$

(iv) Ist G auflösbar, so existiert ein $\chi \in \operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ mit $V_\chi \neq \{0\}$.

Abgabe am 02.12.04 vor der Vorlesung