Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

7. Übung zur Algebra 1, WS 04/05

Aufgabe 1: (*10 Punkte*) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd.

(i) Bestimmen Sie alle invertierbaren Elemente und alle Nullteiler in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(ii) Sei p eine Primzahl und $n = p^3$. Bestimmen Sie alle Ideale in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(iii) Geben Sie einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/n{\cdot}m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ an und bestimmen Sie dessen Kern.

(iv) Bestimmen Sie einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ explizit.

(v) Bestimmen Sie das (multiplikativ) inverse Element von 113 in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2: (*10 Punkte*) Zeigen Sie, daß es bis auf Isomorphie vier vierelementige Ringe gibt. Welche davon sind kommutativ, nullteilerfrei oder Körper?
Sei nun p eine beliebige Primzahl. Wieviele nicht isomorphe Ringe mit p^2 Elementen gibt es?

Aufgabe 3: (*10 Punkte*) Sei R ein Integritätsring. Ein Element $p \in R$ heißt *Primelement*, wenn

(a) p eine von Null verschiedene Nichteinheit ist und

(b) für alle $a, b \in R$ aus $p \mid ab$ stets $p \mid a$ oder $p \mid b$ folgt.

Ein Element $q \in R$ heißt *irreduzibel*, wenn

(a) q eine von Null verschiedene Nichteinheit ist und

(b) $q = ab$ mit $a, b \in R$ nur für $a \in R^*$ oder $b \in R^*$ möglich ist.

Zeigen Sie,

(i) daß jedes Primelement irreduzibel ist.

(ii) daß die Umkehrung nicht gilt, indem Sie in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ein geeignetes Element auf zwei verschiedene Weisen in irreduzible Faktoren zerlegen.

Aufgabe 4: Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie:

(i) Für ein Ideal $I \neq R$ von R sind äquivalent:

(a) Für Elemente $a, b \in R$ gilt: $ab \in I \Rightarrow a \in I$ oder $b \in I$.

(b) Der Ring R/I ist nullteilerfrei.

Solche Ideale heißen *Primideale*.

(ii) Ist jedes von R verschiedene Hauptideal in R ein Primideal, so ist R Körper.

(iii) Sei I ein Ideal in R und $I[X] = IR[X]$ das von I im Ring $R[X]$ erzeugte Ideal. Dann ist $I[X]$ Primideal in $R[X]$ genau dann, wenn I Primideal von R ist.

(iv) $I := \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f(0) = 0\} \subset \mathbb{Z}[X]$ ist ein Hauptideal in $\mathbb{Z}[X]$. Ist I Primideal? Ist I maximales Ideal? Ist $\mathbb{Z}[X]$ ein Hauptidealring?

Abgabe am 09.12.04 vor der Vorlesung