Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

8. Übung zur Algebra 1, WS 04/05

Aufgabe 1: (*10 Punkte*) Welche der folgenden Körpererweiterungen sind endlich, algebraisch, transzendent? Versuchen Sie jeweils, den Grad der Erweiterung zu bestimmen.

(i) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$,
(ii) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,
(iii) $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$, wobei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine n-te Einheitswurzel ist,
(iv) $\mathbb{Q}(\{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ algebraisch}/\mathbb{Q}\})/\mathbb{Q}$,
(v) $\mathbb{R}(\{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ algebraisch}/\mathbb{R}\})/\mathbb{R}$,
(vi) $\mathbb{R}(\{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ algebraisch}/\mathbb{Q}\})/\mathbb{Q}$,
(vii) $\mathbb{Q}(\{\sqrt[n]{2} \mid n \in \mathbb{N}\})/\mathbb{Q}$,
(viii) $\mathbb{Q}(\{\sqrt{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\})/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2: (*10 Punkte*) Sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$.

(i) Bestimmen eine $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis von $\mathbb{Q}(\alpha)$.
(ii) Stellen Sie α^{-1} bezüglich dieser Basis dar.
(iii) Geben Sie zu

$$\begin{array}{rcl} \phi_\beta : \mathbb{Q}(\alpha) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\alpha) \\ x & \mapsto & \beta x \end{array}$$

für $\beta = \alpha$ und $\beta = \alpha^{-1}$ eine Darstellungsmatrix an.

Aufgabe 3: (*10 Punkte*) Sei $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$. Zeigen Sie:
Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ ist euklidisch bezüglich der Gradfunktion

$$\deg(a+bi) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } (a,b) = (0,0) \\ a^2+b^2 & \text{sonst} \end{cases} .$$

D. h. zu $f, q \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\deg(q) \geq 1$ existieren $g, r \in \mathbb{Z}[i]$ mit $f = g \cdot q + r$ und $\deg(r) < \deg(q)$.

Aufgabe 4: (*10 Punkte*) Bestimmen Sie für die Polynome

$$f(X) = X^5 + 2X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 2 \quad \text{und} \quad g(X) = X^4 - 2$$

einen größten gemeinsamen Teiler in $\mathbb{Q}[X]$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ und $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$!

Abgabe am 16.12.04 vor der Vorlesung