Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

9. Übung zur Algebra 1, WS 04/05

Aufgabe 1: (*10 Punkte*) Beweisen Sie das
Lemma von Gauß: Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom und sei $f = g \cdot h$ eine Zerlegung in normierte Polynome $g, h \in \mathbb{Q}[X]$, dann gilt $g, h \in \mathbb{Z}[X]$.

Aufgabe 2: (*10 Punkte*) Beweisen Sie das
Irreduzibilitätskriterium nach Eisenstein: Das Polynom

$$f(X) = a_n X^n + \ldots a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$$

ist irreduzibel, falls eine Primzahl p existeirt, für die gilt

$$p \nmid a_n \ , \quad p \mid a_i \ \forall 0 \leq i \leq n-1 \ , \quad p^2 \nmid a_0 \ .$$

Bemerkung: Sowohl in Aufgabe 1, als auch in Aufgabe 2 kann man $\mathbb{Z}$ durch einen beliebigen faktoriellen Ring und $\mathbb{Q}$ durch dessen Quotientenkörper ersetzen.

Aufgabe 3: (*10 Punkte*) Bestimmen Sie den Zerfällungkörper von $X^4 - 7$.

Aufgabe 4: (*10 Punkte*) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $m(X)$ von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ und den Zerfällungskörper von $m(X)$.

Abgabe am 23.12.04 vor der Vorlesung