Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

12. Übung zur Algebra 1, WS 04/05

Definition: Sei L ein Körper und $f(X) = (X-\alpha_1)\cdot(X-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(X-\alpha_n) \in L[X]$ ein Polynom über L. Dann setzen wir

$$\Delta(f) := \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j) \quad \text{und}$$
$$\mathrm{Disk}(f) := \Delta(f)^2 \ .$$

$\mathrm{Disk}(f)$ heißt die *Diskriminante des Polynoms f*.

Aufgabe 1: (*10 Punkte*) Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$ und $f(X) = X^3 + bX^2 + cX + d \in K[X]$ ein irreduzibles separables Polynom mit Zerfällungskörper L. Zeigen Sie

(i) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|K)$ von $L|K$ ist isomorph zu S_3 oder A_3.

(ii) Genau dann ist $\mathrm{Gal}(L|K) \cong A_3$, wenn $\mathrm{Disk}(f)$ in K ein Quadrat ist.

(iii) Für das Polynom $g(X) = f(X - \frac{b}{3}) \in K[X]$ gilt $g(X) = X^3 + pX + q$ für geeignete $p, q \in K$.

(iv) Für die Diskriminanten gilt $\mathrm{Disk}(f) = \mathrm{Disk}(g) = -4p^3 - 27q^2$.

Aufgabe 2: (*10 Punkte*) Sei $f = X^3 + aX^2 + (a-3)X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ mit $a \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(i) f hat keine rationale Nullstelle.

(ii) Ist β eine Nullstelle von f, so auch $\frac{-1}{1+\beta}$.

(iii) Durch $\sigma : x \mapsto \frac{-1}{1+x}$ wird eine fixpunktfreie Bijektion der Ordnung 3 von $\mathbb{R} - \{0, -1\}$ auf sich gegeben.

(iv) Bestimmen Sie die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3: (*20 Punkte*) Sei $f(X) = X^4 - X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

(i) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L von f.

(ii) Bestimmen Sie die Galoisgruppe von $L|\mathbb{Q}$.

(iii) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset K \subset L$. Welcher Erweiterungen $L|K$ und $K|\mathbb{Q}$ sind galoissch?

Abgabe am 27.01.05 vor der Vorlesung