Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

14. Übung zur Algebra 1, WS 04/05

Aufgabe 1: (*20 Punkte*) Sei $\zeta_7 \in \mathbb{C}$ eine primitive 7-Einheitswurzel, d. h. $\zeta_7^7 = 1$ und $\zeta_7^j \neq 1$ für $1 \leq j \leq 6$.

(i) Zeigen Sie, daß das Minimalpolynom $M(\zeta_7, \mathbb{Q}) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^6$ ist.

(ii) Zeigen Sie, daß $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7)|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist.

(iii) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ und $\mathbb{Q}(\zeta_7) \cap \mathbb{R}$ die einzigen Körper sind, die zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ liegen.

(iv) Berechnen Sie $\mathrm{Aut}_k(K)$ für $k, K \in \{\mathbb{Q},\ \mathbb{Q}(\sqrt{-7}),\ \mathbb{Q}(\zeta_7) \cap \mathbb{R}, \mathbb{Q}(\zeta_7)\}$.

Hinweis: Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so gelten die folgenden Relationen, die Sie eventuell nützlich finden werden:

$$\prod_{j=1}^{n-1}(1 - \zeta_n^j) = n \text{ und } (1 - \zeta_n^j)(1 - \zeta_n^{-j}) = -(\zeta_n^{\frac{-j}{2}} - \zeta_n^{\frac{j}{2}})^2 \in \mathbb{R},$$

wobei $\pm\frac{a}{2}$ modulo n zu verstehen ist. Versuchen Sie, diese Relationen zu beweisen.

Aufgabe 2: (*10 Punkte*) Zeigen Sie: ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$, dessen Galoisgruppe eine Diedergruppe ist, ist durch Radikale auflösbar.

Aufgabe 3: (*10 Punkte*) Sei $f(X) = X^5 - 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe von f.

Abgabe am 10.02.05 vor der Vorlesung