

Universität des Saarlandes  
Fachrichtung 6.1, Mathematik  
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler  
M.Sc. Philipp Stopp



## 1. Übung zu Einführung in die analytische Zahlentheorie SS 2016

**Aufgabe 1.** (5 + 5 = 10 Punkte)

- (i) Es sei  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Wie lautet die Taylorentwicklung im Punkt 0 von  $\frac{1}{X+a} \in \mathbb{Q}(X)$ ?
- (ii) Wie lautet die Taylorentwicklung im Punkt 0 von  $\frac{1}{X^2-3X+2} \in \mathbb{Q}(X)$ ?

**Aufgabe 2.** (10 Punkte)

Finden Sie einen rationalen Ausdruck  $\frac{f(X)}{g(X)} \in \mathbb{Q}[X]$ , dessen Taylorentwicklung im Punkt 0 gerade  $\sum_{n=0}^{\infty} nX^n$  ist.

**Aufgabe 3.** (20 = 3 + 10 + 3 + 4 Punkte)

Es sei  $N \in \mathbb{N}$ ,  $B_k$  die  $k$ -te Bernoulli-Zahl und  $B_k(X)$  das  $k$ -te Bernoulli-Polynom. Zeigen Sie:

- (i)  $B_k(X) = (-1)^k B_k(1 - X)$  ;
- (ii)  $N^{k-1} \sum_{i=0}^{N-1} B_k(X + \frac{i}{N}) = B_k(NX)$  ;
- (iii)  $B_k(\frac{1}{2}) = -(1 - 2^{1-k})B_k$  ;
- (iv)  $B_{2k}(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2}(1 - 3^{1-2k})B_{2k}$  .

*Bemerkung:* Häufig wird “Bestimmen Sie die Taylorentwicklung im Punkt 0 von  $XXX$ .” durch “Bestimmen Sie die formale Potenzreihe zu  $XXX$ .” abgekürzt.

Abgabe am Dienstag, den 03.05.2016 vor der Vorlesung