

Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp



**Probleme der Algebraischen Zahlentheorie,
WS 2012/2013**

Die beiden folgenden Übungen sind Programmierübungen. Grundlage für beide Aufgaben ist das Programm PARI/GP, welches kostenlos auf der Seite

<http://pari.math.u-bordeaux.fr/>

erhältlich ist. Auf der Seite befindet sich auch eine ausführliche Dokumentation.

Problem 5.

Faktorisieren Sie

- (1) $2^{2^7} + 1$ in \mathbb{Z} ,
- (2) $X^{105} - 1$ über \mathbb{Q} und \mathbb{F}_7 ,
- (3) $X^{17} - 1$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$.

(Hierzu sind die folgenden Funktionen in PARI/GP hilfreich: `Mod`, `factor`, `factornf`)

Problem 6.

- (1) Benutzen Sie PARI/GP um für den Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-21})$ die Klassengruppe und deren Struktur zu bestimmen. Geben Sie Repräsentanten der einzelnen Idealklassen an. Verifizieren Sie mit Hilfe von PARI/GP, dass $I_1 = 4\mathbb{Z} + (2 + 2\sqrt{-21})\mathbb{Z}$ und $I_2 = 10\mathbb{Z} + (4 + 2\sqrt{-21})\mathbb{Z}$ ganze Ideale von K sind und bestimmen Sie deren Norm und \mathbb{Z} -Basen für $(I_1)^{-1}$, $I_1 \cap I_2$, $I_1 + I_2$, $I_1 * I_2$ und I_1/I_2 . Zerlegen Sie I_1, I_2 in Primideale.
(Hinweis: In der Dokumentation von PARI/GP finden Sie die Funktionen `bnfinit`, `nfisideal`, `idealnrm`, `idealinv`, `idealadd`, `idealmul`, `idealfactor`, etc.. Insbesondere ist die Klassengruppe von $L = \text{bnfinit}(f(x))$ durch `L.clgp` gegeben.)
- (2) Zählen Sie ab wieviele ganze Ideale jeder Idealklasse von K aus (1) eine Norm kleiner als 10000 haben. Gibt es gravierende Unterschiede von Klasse zu Klasse oder herrscht in etwa Gleichverteilung?
(Hinweis: Hilfreich sind hier insbesondere `ideallist`, `bnfisprincipal`.)
- (3) Durchlaufen Sie alle imaginärquadratischen Zahlkörper deren Diskriminanten höchstens den Absolutbetrag 5000 haben und zählen Sie für $r = 1, 2, 3, 4$ wieviele der Körper eine Klassengruppe vom Rang r haben. Was fällt auf?