

Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp



5. Übung zu Algebra SS 2016

Aufgabe 1. (20 = 6 + 2 + 4 + 8 Punkte)

Es sei $f(X) = X^6 - p^3q^2 \in \mathbb{Q}[X]$ mit zwei voneinander verschiedenen Primzahlen p und q .

- (i) Zeigen Sie, dass f in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.
- (ii) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L von f über \mathbb{Q} und geben Sie $[L : \mathbb{Q}]$ an.
- (iii) Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\text{Gal}(f)$ und geben Sie einen injektiven Homomorphismus von $\text{Gal}(f)$ in die symmetrische Gruppe S_6 an. Ist $\text{Gal}(f)$ abelsch?
- (iv) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper Z der Erweiterung $L | \mathbb{Q}$ mit $[Z : \mathbb{Q}] = 6$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Es sei K der Körper mit q Elementen (q eine Primzahlpotenz), L der Zerfällungskörper von $X^n - 1$ über K , und $m = [L : K]$.

Zeigen Sie, dass m die kleinste natürliche Zahl m' mit $n \mid q^{m'} - 1$ ist.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Bestimmen Sie $\text{Gal}(f)$ für das Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(X) = X^3 + X^2 - 2X + 1$.

Abgabe am 25.05.2016 vor der Vorlesung