



## 1. Übung zur Analysis I, Sommersemester 2010

---

**Aufgabe 1:** (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie für beliebige Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(b) Ist  $A \subseteq X$ , so schreibt man  $A^c$  oder  $X \setminus A$  für die Menge  $\{x \in X \mid x \notin A\}$ .  
Zeigen Sie für  $A, B \subseteq X$ :

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \quad X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

---

**Aufgabe 2:** (10 Punkte) Für eine Menge  $X$  sei

$$\mathfrak{P}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}$$

die Potenzmenge von  $X$ .

(a) Geben Sie  $\mathfrak{P}(X)$  an für folgende Mengen  $X$ :

(i)  $X := \{\text{Saarland, Bayern, NRW}\}$ ;

(ii)  $X := \emptyset$ ;

(iii)  $X := \{\emptyset\}$ .

(b) Zeigen Sie: Ist  $|X| = n$  für ein  $n \in \mathbb{N}_0$ , so ist  $|\mathfrak{P}(X)| = 2^n$ .

---

**Aufgabe 3:** (10 Punkte) Negieren Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es regnet.

(b) Es regnet oder schneit.

(c) Es ist Winter, und es schneit.

(d) Jeder Student besucht jede Vorlesung.

(e) Jeder Student besucht genau eine Vorlesung.

(f) In jedem Semester gibt es in jeder Klausur eine Aufgabe, die für keinen Studenten unlösbar ist.

Schreiben Sie für (d)-(f) sowohl die Aussage als auch die Negation mit Hilfe von Quantoren. Dabei soll kein Quantor hinter einem Negationszeichen auftauchen.

---

**Aufgabe 4:** (10 Punkte) Gegeben seien für jede natürliche Zahl  $n$  die folgenden Aussagen:

$$A(n) := „1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.“$$

$$B(n) := „2 + 4 + 6 + \dots + 2n = (n - 2)(n + 1).“$$

$$C(n) := „1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n = 2n^2 - n - 2.“$$

Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen  $n$  die Implikationen:

(a)  $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ ;

(b)  $B(n) \Rightarrow B(n + 1)$ ;

(c)  $(A(n) \text{ und } B(n)) \Rightarrow C(n)$ ;

*Zusatzfrage*, falls Sie schon vollständige Induktion kennengelernt haben:

Für welche der Aussagen  $A(n)$ ,  $B(n)$  und  $C(n)$  können Sie aufgrund Ihrer Überlegungen entscheiden, ob sie richtig oder falsch sind?

---

**Aufgabe 5:** (10 Punkte)

Soeben hat Ihnen der Postbote ein Paket gebracht. Sie öffnen es und finden darin einen mit Schaltern versehenen Kasten und einen Brief mit folgender Nachricht:

„Verehrte(r) Freund(in),

Mit dem Öffnen des Pakets haben Sie eine Zeitbombe aktiviert. Sie explodiert in zwanzig Minuten, es sei denn, Sie bringen die vier an dem Kasten befindlichen, nummerierten Schalter in die richtigen Stellungen (nach oben beziehungsweise unten).

Dies sollte Ihnen gelingen, wenn Sie diese Warnung beachten: Bei jeder der folgenden Schalterstellungen wird es knallen:

(a) alle Schalter oben;

(b) 2 und 4 in der gleichen Stellung und 1 unten;

(c) 4 oben, 1 und 3 unten;

(d) 1 und 3 in der gleichen Stellung und 4 unten;

(e) 1 oben, 2 und 4 unten;

(f) 3 unten, und falls 1 unten, dann auch 4 unten;

(g) 3 oben, 1 unten und falls 2 oben, dann 4 unten.

Mit freundlichen Grüßen, Ihr Komitee zur Ausrottung der Dummheit.“

Retten Sie sich und Ihre Nachbarn!

---

**Hinweis:**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen, den Namen Ihres Bremsers und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf die Abgabe.

Legen Sie Ihre Abgabe am Freitag vor der Vorlesung in die Mappe, die zu Ihrer Übungsgruppe gehört.

**Die Übungsgruppen starten am Montag, den 19.04.!**