UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2014

Blatt 1 Abgabetermin: 30.04.2014

Aufgabe 5 (6+6=12 Punkte)

Seien X, Y nichtleere Mengen und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Zeigen Sie: Für alle Teilmengen $A, B \subset Y$ gilt:

(a) $\overset{-1}{f}(A \cup B) = \overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B)$,

(b) $\overset{-1}{f}(A \cap B) = \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$,

(c) $\overset{-1}{f}(Y \setminus B) = X \setminus \overset{-1}{f}(B)$.

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle Teilmengen $A, B \subset X$ gilt:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

(c) $f(X \setminus B) = Y \setminus f(B)$.

Aufgabe 6 (4+4=8 Punkte)

Seien X, Y, Z nichtleere Mengen und seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(i) Zeigen Sie:

(a) Sind f, g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f, g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Sind f, g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $g \circ f$ injektiv, so sind auch f und g injektiv.

(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so sind auch f und g surjektiv.

(c) Ist $g \circ f$ bijektiv, so sind auch f und g bijektiv.

(bitte wenden)

Aufgabe 7 **(4+4=8 Punkte)**

Seien $X \neq \varnothing \neq Y$ Mengen und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(i) f ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ existiert, für die $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt.

(ii) f ist genau dann surjektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ existiert, für die $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt.

Aufgabe 8 **(2+4+2+4=12 Punkte)**

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto \frac{\frac{y-x}{1+xy} + \frac{z-y}{1+yz}}{1 - \left(\frac{y-x}{1+xy}\frac{z-y}{1+yz}\right)}.$$

(i) Zeigen Sie, dass für $x, y, z \in [0,\infty)$ gilt

$$\frac{y-x}{1+xy}\frac{z-y}{1+yz} < 1.$$

Folgern Sie, dass f wohldefiniert ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der Ausdruck $f(x,y,z)$ unabhängig von y ist. Was bedeutet das für die Injektivität von f?

(iii) Beweisen oder widerlegen Sie: f ist surjektiv.

(iv) Untersuchen Sie die Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ g(z) = f(1,1,z)$ auf Injektivität und Surjektivität.

Hinweis:

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den Übungsblättern mittwochs **vor** der Vorlesung ab. Die Abgabe erfolgt **einzeln** in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5 vor dem Zeichensaal in das Fach Ihres jeweiligen Übungsgruppenleiters.
Um zu den Klausuren zugelassen zu werden, müssen Sie mindestens 50% der Gesamtpunkte aller Übungen erzielen, sowie regelmäßig (**Anwesenheitspflicht**) und aktiv (**Vorrechnen**) an den Übungen teilnehmen.
Bei Fragen oder Problemen bezüglich der Übungen oder Klausuren wenden Sie sich bitte an Michael Wernet (Zimmer 4.15, Email: wernet@math.uni-sb.de).