UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2014

Blatt 10 Abgabetermin: 02.07.2014

Aufgabe 41 **(4+4+3=11 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und die Grenzwerte

$$v = \lim_{x \to -\infty} f(x) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad w = \lim_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$$

mögen existieren. Zeigen Sie

(i) f ist beschränkt.

(ii) Gilt zusätzlich $v = w$, so nimmt f sein Maximum oder sein Minimum auf $\mathbb{R}$ an.

(iii) Bleibt die Behauptung in (ii) ohne die Voraussetzung $v = w$ richtig? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 42 **(7+3=10 Punkte)**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei

$$(i) \quad I = (a, b),$$
$$(ii) \quad I = [a, b].$$

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie für jede Implikation zwischen den drei Aussagen

(1) f ist stetig,
(2) f ist gleichmäßig stetig,
(3) f ist Lipschitz-beschränkt

einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(bitte wenden)

Aufgabe 43 **(1+2+2+2=7 Punkte)**

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(i) $\varnothing, X$ sind offen in X.

(ii) Sind $U_1, \ldots, U_r \subset X$ offen, dann ist auch $U_1 \cap \ldots \cap U_r \subset X$ offen.

(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen in X, dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \subset X$ offen.

(iv) Gilt (ii) auch für beliebige Durchschnitte $\bigcap_{i \in I} U_i$ offener Mengen? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\varnothing \neq A \subset X$. Dann heißt

$$\partial A = \{x \in X;\ \forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(X) \cap A \neq \varnothing \neq U_\epsilon(x) \cap (X \setminus A)\}$$

der Rand *von A.*

Aufgabe 44 **(5+3+4=12 Punkte)**

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\varnothing \neq A \subset X$. Zeigen Sie:

(i) $\partial A \subset X$ ist abgeschlossen.

(ii) $\overline{A} = A \cup \partial A$.

(iii) $\overline{A} \setminus \partial A \subset X$ ist offen.
