UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2014

Blatt 11 Abgabetermin: 09.07.2014

Aufgabe 45 (3+6=9 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Abbildungen $f_n, g_n, h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad g(x) = \frac{1}{n} f_n(x), \quad h_n(x) = (f_n(x))^2.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf ganz $\mathbb{R}$ konvergieren.

(ii) Welche dieser Folgen konvergieren gleichmäßig auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 46 (2+4+4=10 Punkte)

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_a, R_b > 0$. Zeigen Sie:

(i) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ hat einen Konvergenzradius $R_{a+b} \geq \min\{R_a, R_b\}$.

(ii) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n b_n) z^n$ hat einen Konvergenzradius $R_{ab} \geq R_a R_b$.

(iii) Geben Sie jeweils Beispiele an, für die in den Abschätzungen aus (i) und (ii) Gleichheit bzw. Ungleichheit gelten.

Aufgabe 47 (10 Punkte)

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und sei $I \subset (-1, 1)$ ein abgeschlossenes Intervall. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$R_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n$$

absolut und gleichmäßig für $x \in I$ und $s \in J$ konvergiert.

(*Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $l > 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass für alle $n \geq n_0$ und alle $s \in J$ gilt:* $\left|\binom{s}{n+1}\right| \leq l \left|\binom{s}{n}\right|$.)

(bitte wenden)

Aufgabe 48 **(9+2=11 Punkte)**

(i) Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ und $x \in (-1, 1)$

$$R_s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n = (1+x)^s$$

gilt.

(*Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 13 und Aufgabe 47 um zu zeigen, dass $R_s(x)R_t(x) = R_{s+t}(x)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt (Cauchy-Produkt). Folgern Sie schrittweise, dass die gewünschte Formel für alle natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen s gilt.*)

(ii) Welche Formel ergibt sich für $s = -1$ und $x = -y$?