UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2014

Blatt 3 Abgabetermin: 14.05.2014

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man den Binomialkoeffizienten $\binom{x}{n}$ *als*

$$\binom{x}{n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{x-j+1}{j} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$$

(hierbei ist das leere Produkt $\prod_{j=1}^{0} a_j$ definitionsgemäß 1 für alle Wahlen von a_j).

Aufgabe 13 (2+4+6=12 Punkte)

Zeigen Sie:

(i) Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{x}{n} + \binom{x}{n+1} = \binom{x+1}{n+1}.$$

(ii) Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

(iii) Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{n-k}\binom{y}{k}.$$

(*Hinweis: Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.*)

Aufgabe 14 (2+8=10 Punkte)

Seien $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(i) Die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0 \text{ und } x^n \leq a\}$$

ist durch $1 + a$ nach oben beschränkt.

(ii) Für $S = \sup A$ gilt $S^n = a$.

(*Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis. Unter der Annahme $S^n < a$ finden Sie ein $\delta > 0$ mit $(S+\delta)^n \leq a$, für $S^n > a$ entsprechend.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 15 **(6 Punkte)**

Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien

$$z_n = \left(1 - i\sqrt{7}\right)^n, \; x_n = \text{Re } z_n, \; y_n = \text{Im } z_n.$$

Zeigen Sie:

$$x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = 2^{3n}\sqrt{7} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Aufgabe 16 **(6+2+4=12 Punkte)**

(i) Sei $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Zeigen Sie: Die Gleichung $z^2 = c$ besitzt genau zwei Lösungen in $\mathbb{C}$, nämlich w und $-w$ mit

$$\text{Re } w = \sqrt{\frac{|c| + \text{Re } c}{2}}, \quad |\text{Im } w| = \sqrt{\frac{|c| - \text{Re } c}{2}}.$$

(ii) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von

(a) $z^2 = 50i$,

(b) $(3+i)z^2 + (-22+6i)z + (25-25i) = 0$.