UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2014

Blatt 4 Abgabetermin: 21.05.2014

Aufgabe 17 (6 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y > x > 0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.

Seien $a < b$ und $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine Teilung *T von I ist ein Tupel $(t_i)_{i=0}^n$ mit*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Sei $\mathfrak{T}([a, b])$ die Menge der Teilungen von I. Seien $T = (t_i)_{i=0}^n$, $S = (s_j)_{j=0}^m \in \mathfrak{T}([a, b])$ Teilungen von I, so heißt S feiner als T, falls

$$\{t_i;\ i = 0, \ldots, n\} \subset \{s_j;\ j = 0, \ldots, m\}$$

gilt.

Aufgabe 18 (4+6+2=12 Punkte)

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei ein offenes Intervall $I_n = (a_n, b_n)$ gegeben mit

(a) $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} :\ b_n - a_n < \epsilon$.

Beweisen oder widerlegen Sie:

Es gibt genau eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $c \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}.$$

(ii) Seien $a < b$ und $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Zeigen Sie:

(a) Die Relation $\geq$ auf der Menge $\mathfrak{T}([a, b])$ der Teilungen von I, die durch

$$T \geq S \quad \Leftrightarrow \quad S \text{ ist feiner als } T$$

definiert wird, ist eine Ordnungsrelation. Ist diese vollständig?

(b) Für $T, S \in \mathfrak{T}([a, b])$ existiert $R \in \mathfrak{T}([a, b])$ mit $T \geq R$ und $S \geq R$.

(bitte wenden)

Ein Körper *ist eine Menge K, versehen mit einer Addition $+ : K \times K \to K$ und einer Multiplikation $\cdot : K \times K \to K$, für welche die Eigenschaften gelten, die für $K = \mathbb{Q}$ in Satz 2.3.1 (iii) der Vorlesung zusammengefasst wurden.*

Aufgabe 19 (5+5=10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Die Menge $\mathbb{K}_1 = \{a + b\sqrt{3};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$, versehen mit der Addition und der Multiplikation aus $\mathbb{R}$, ist ein Körper.

(ii) Die Menge $\mathbb{K}_2 = \{a + ib;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$, versehen mit der Addition und der Multiplikation aus $\mathbb{C}$, ist ein Körper.

Aufgabe 20 (5+2+5=12 Punkte)

(i) Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass

$$\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} < \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

für $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und $2 \leq k \leq n$ erfüllt ist. Gilt die erste Ungleichung auch für $k = 0, 1$?

(ii) Beweisen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ die Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(*Hinweis: Binomialtheorem.*)

(iii) Zeigen Sie, dass

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(*Hinweis: Binomialtheorem und geometrische Summe.*)
