UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2014

Blatt 5 Abgabetermin: 28.05.2014

Ein Polynom *(mit rationalen Koeffizienten) ist ein Ausdruck* $p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ *mit* $a_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 0, \ldots, d)$. *Ist* $a_d \neq 0$, *so heißt* $d = \deg(p)$ *der Grad von* p. *Wir setzen* $\deg(0) = -\infty$ *für das Nullpolynom* 0. *Für die Menge aller Polynome mit rationalen (bzw. reellen, komplexen) Koeffizienten schreiben wir* $\mathbb{Q}[x]$ *(bzw.* $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$*).* $\mathbb{Q}[x]$ *(bzw.* $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$*) ist ein Ring bzgl. der üblichen Addition und Multiplikation.*

Aufgabe 21 (4+2+2+3=11 Punkte)

(i) Seien $p, q \in \mathbb{Q}[x]$ mit $q \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt eindeutige Polynome $r, s \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg(r) < \deg(q)$ und

$$p = sq + r.$$

(*Hinweis: Vollständige Induktion nach dem Grad von* p.)

(ii) Seien $p_1, p_2 \neq 0 \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg(p_1) \geq \deg(p_2)$. Für $i \geq 2$ und $p_i \neq 0$ wähle Polynome q_i und p_{i+1} nach Teil (i) mit $\deg(p_{i+1}) < \deg(p_i)$ und

$$p_{i-1} = q_i p_i + p_{i+1}.$$

Zeigen Sie: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p_n \neq 0 = p_{n+1}$ und $p_n = ggT(p_1, p_2)$, d.h. es gibt kein Polynom $q \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg(q) > \deg(p_n)$ das Teiler von p_1 und p_2 ist.

(*Hinweis: Die Aussagen (i) und (ii) gelten auch für Polynome mit reellen oder komplexen Koeffizienten.*)

(iii) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von $p_1 = x^7 + x^6 + 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 + 1$ und $p_2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ mit Hilfe von Teil (ii). Geben Sie insbesondere für jeden Schritt q_i und p_{i+1} an.

(iv) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $p(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + 3x - 1$.

Aufgabe 22 (4+6=10 Punkte)

Finden Sie jeweils ein $a \in \mathbb{R}$ und zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > N(\epsilon)$, falls

(i) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 23 **(3+2+2=7 Punkte)**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

(i) Zeigen Sie: Ist $a_n \geq 0$ für alle n, so ist $a \geq 0$.

(ii) Zeigen Sie: Ist $a_n \geq b_n$ für alle n, so ist $a \geq b$.

(iii) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $a_n > b_n$ für alle n, so ist $a > b$.

Aufgabe 24 **(4+8=12 Punkte)**

(i) Zeigen Sie

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$.

(ii) Untersuchen Sie, für welche $q \in \mathbb{R}$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = q^n$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.
