UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2014

Blatt 6 Abgabetermin: 06.06.2014

Aufgabe 25 **(3+5=8 Punkte)**

Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

für $n \geq 2$.

(i) Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

(ii) Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \in \mathbb{R}$ existiert, und berechnen Sie ihn.

(*Hinweis: Aufgabe 24.*)

Aufgabe 26 **(3+3+1+3=10 Punkte)**

Seien $a, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $a > 0,\ x_0 > 0$ und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{k}x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Zeigen Sie:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n^k \geq a$. Schätzen Sie hierfür den Ausdruck $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^k$ mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung (siehe Aufgabe 24 (i)) nach unten ab.

(ii) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

(iii) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen ein $x > 0$.

(iv) Der Grenzwert x der Folge erfüllt die Gleichung $x^k = a$.

(bitte wenden)

Aufgabe 27 **(2+2+2+2+2+2=12 Punkte)**

Entscheiden Sie für die nachstehend definierten Folgen, ob sie (eigentlich oder uneigentlich) konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(i) $a_n = \frac{(3n+1)^2(2n+1)}{2n^3-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $b_n = (-1)^n n^2$ für $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $c_n = \frac{(-1)^n 12n+4}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $d_n = \frac{2n^2(-1)^{n+1}-n\sqrt{n}+5}{n^2-4n\sqrt{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 17$.

(v) $e_n = \sqrt{n^2+n} - n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(vi) $f_n = \frac{n!}{n^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(*Hinweis: Aufgabe 20.*)

Aufgabe 28 **(2+2+2+2+2=10 Punkte)**

(i) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren, und berechnen Sie ihren Grenzwert:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{2n+3}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$.

(*Hinweis: Partialbruchzerlegung.*)

(ii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^4}{4^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$.

(*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 20 bei den Teilen (b) und (c).*)
