UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2014

Blatt 7 Abgabetermin: 11.06.2014

Aufgabe 29 (6+4=10 Punkte)

(i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver reller Zahlen derart, dass $c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$ existiert. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergent.}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{4n^3-3n^2+2}$ divergiert und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2-n}$ konvergiert.

Aufgabe 30 (3+3+2+3=11 Punkte)

Seien $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,

(ii) $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$,

(iii) $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$,

(iv) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\lim_{t\to\infty} t^{-k}\cosh(t) = \lim_{t\to\infty} t^{-k}\sinh(t) = \infty.$$

Aufgabe 31 (3+3+3=9 Punkte)

Bestimmen Sie

(i) $\lim\limits_{x\to 1-} \exp\left(-\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\right)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^8+4} - x^4\right)$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{9}{x}\left(\frac{3}{(x+3)^3} - \frac{1}{9}\right)$.

(bitte wenden)

(*Hinweis: Für* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $[x] = \max\{n \in \mathbb{N}; n \leq x\}$.)

Aufgabe 32 **(2+2+3+3=10 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs auf Stetigkeit:

(i) $f_1(x) = \frac{(x-4)\cdot\exp(5x^2-4x)-2x}{x^3-x^2+x-1}$

(ii) $f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{\exp\left(\frac{1}{|x|}\right)} & \text{, falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$

(iii) $f_3(x) = \begin{cases} 2x & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 - 2x & \text{, falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(iv) $f_4(x) = \sqrt{x}(x - [x])$