UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2014

Blatt 8 Abgabetermin: 18.06.2014

Aufgabe 33 (2+4+4=10 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie:

(i) Die Funktion $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ ist Lipschitz-beschränkt.

(ii) Die Funktion $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max(f(x), g(x))$ ist stetig.

(iii) Ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, so ist $f = g$.

Aufgabe 34 (2+3+3=8 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{nx}{1+|nx|}$ gegeben. Zeigen Sie:

(i) g_n ist stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$,

(ii) Der Limes $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ existiert für jedes $x \in \mathbb{R}$,

(iii) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x)$ stetig?

Aufgabe 35 (8 Punkte)

Sei $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^2$$

für ein $c > 0$ und alle $x, y \in I$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(*Hinweis: Unterteilen Sie das Intervall mit den Endpunkten x und y äquidistant.*)

(bitte wenden)

Eine Norm *auf* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Abbildung* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften*

(1) $\|x\| \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *und* $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$*,*

(2) $\|tx\| = |t|\|x\|$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *und* $t \in \mathbb{R}$*,*

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$*.*

Aufgabe 36 (4+6+4=14 Punkte)

Zeigen Sie: Die Abbildungen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$, die definiert sind durch

$$\text{(i)} \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\text{(ii)} \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{(iii)} \qquad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sind Normen auf $\mathbb{R}^n$.

(*Hinweis: zu (ii): Beweisen Sie die Dreiecksungleichung zunächst für die Fälle* $n = 1$ *und* $n = 2$ *und benutzen Sie dann vollständige Induktion nach* n*.*)