



Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2014

Blatt 9

Abgabetermin: 25.06.2014

---

**Aufgabe 37**

**(5+4=9 Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie:

- (i) Es gibt eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die jeden Wert in  $\mathbb{R}$  genau zweimal annimmt.
  - (ii) Es gibt eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die jeden Wert in  $\mathbb{R}$  genau dreimal annimmt.
- 

**Aufgabe 38**

**(2+3+5=10 Punkte)**

Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

- (i) Gilt  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ , so hat  $f$  einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein  $x_0 \in [0, 1]$  mit  $f(x_0) = x_0$ .
  - (ii) Gilt  $f(0) = f(1)$ , so gibt es ein  $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$  mit  $f(x_0) = f(x_0 - \frac{1}{2})$ .
  - (iii) Gilt  $f(0) = f(1)$ , so gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in [0, 1]$  mit  $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$ .
- 

**Aufgabe 39**

**(10 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$  gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-beschränkt ist.

---

**Aufgabe 40**

**(3+4+2+2=11 Punkte)**

Sei  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$  mit Abschluss  $\overline{D}$  und sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig stetig. Zeigen Sie:

- (i) Ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $D$ , so ist  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$ .
  - (ii)  $f$  besitzt eine gleichmäßig stetige Fortsetzung auf  $\overline{D}$ .
  - (iii) Ist  $D$  beschränkt, so ist  $f$  beschränkt.
  - (iv) Ist die Funktion  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{1}{\log(t)}$  stetig bzw. gleichmäßig stetig?
-