Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler

Klausur
zur elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Teil B

Bitte beachten:

Wertung:
Sie können alle sechs Aufgaben bearbeiten. Gewertet werden aber nur die vier besten.

Bearbeitung:
Geben Sie stets explizit das gewählte Modell und alle benötigten Größen an, wie Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten, Zufallsvariablen, Verteilungen und gewählte Approximationen.
Begründen Sie Ihre Rechenschritte sorgfältig!

Rechnungen:
Wieviel Berechnung verlangt ist, ist am Ende der Aufgabenstellung vermerkt, dabei ist:

(a) Explizit: am Ende steht ein gekürzter Bruch (der auch Parameter enthalten kann) oder eine Dezimalentwicklung bis auf drei Stellen genau.

(b) Vereinfachen soweit wie möglich: Ausdrücke der Form $\binom{a}{b}$, e^k, $k!$, $\phi(t)$ und $\sqrt{x}$ mit quadratfreiem x bleiben stehen. Terme werden aber zusammengefaßt.

Aufgabe 1: (*10 Punkte*) Ein Test umfaßt 20 Aussagen. Der Proband soll für jede Aussage angeben, ob sie wahr oder unwahr ist. Für eine richtige Antwort erhält er einen Punkt, für eine falsche wird ihm ein Punkt abgezogen. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Gesamtpunktzahl, wenn alle Antworten zufällig (ohne jede Kenntnis der Materie) gegeben werden.
Rechnung: (a)

Aufgabe 2: (*10 Punkte*) Sie wollen von A nach B fliegen und haben zwei Flugzeuge zur Auswahl: ein zweimotoriges mit einem unerfahrenen Piloten und ein viermotoriges mit einem erfahrenen Piloten.

Fällt kein Motor aus, landen beide Piloten ihre Maschinen mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 sicher. Fallen bei dem zweimotorigen Flugzeug beide Motoren aus, stürzt es ab, ebenso das viermotorige bei Ausfall dreier Motoren.
Gehen Sie davon aus, daß jeder Motor mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ ausfällt. Der unerfahrene Pilot landet mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ die Maschine nach Ausfall eines Motors sicher, der erfahrene hingegen die viermotorige Maschine nach Ausfall von ein oder zwei Motoren mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$. Welcher Flug ist sicherer?
Rechnung: (a)

Aufgabe 3: (*10 Punkte*) In einem Topf sind 70 faire und 30 unfaire Münzen (diese haben zwei Köpfe). Man entnimmt dem Topf nun eine Münze und wirft 1000 mal. Wieviele Köpfe werden im Mittel geworfen?
Rechnung: (a)

Aufgabe 4: (*10 Punkte*) In einem Gebiet wird Öl vermutet. Es werden nacheinander unabhängige Versuchsbohrungen durchgeführt, die mit der Wahrscheinlichkeit p zum Erfolg führen. Jede Einzelbohrung verursacht die Kosten K. Welche Gesamtkosten muß man im Mittel aufwenden, bis man zum ersten Mal auf Öl stößt, wenn man bereit ist, den Versuch beliebig oft zu wiederholen?
Rechnung: (a)

Aufgabe 5: (*10 Punkte*) Sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit dem Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Erwartungswerte der Zufallsvariablen

$$Y := \frac{1}{1+X} \quad \text{und} \quad Z := \frac{X}{1+X} \ .$$

Rechnung: (a)

Aufgabe 6: (*10 Punkte*) Im Durchschnitt ist am Nachthimmel jede halbe Stunde ein Meteorit zu beobachten. Eines Abends liegt Peter am Strand und beobachtet den Himmel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er in den ersten 15 Minuten einen Meteoriten beobachtet?
(Die Zeit ist ein Intervall $[0, \infty)$, der Zeitpunkt der ersten Beobachtung also eine Zufallsvariable mit Werten in $[0, \infty)$. Wählen Sie eine geeignete Verteilungsannahme.)
Rechnung: (b)