Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

3. Übung zur elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, SS 04

Aufgabe 1:(*10 Punkte*) Karin nimmt an einer Prüfung teil, die aus der Bearbeitung eines Multiple-Choice-Fragebogens besteht. Dabei werden zu jeder der neun Frage fünf Antworten vorgegeben, von denen jeweils zwei richtig sind. Die Frage gilt als richtig beantwortet, wenn das einzige Kreuz bei einer der richtigen Antworten gemacht wird. Bestanden ist die Prüfung, wenn wenigstens sechs Antworten richtig sind. Leider hat Karin keine Ahnung von dem Stoff, über den sie geprüft wird, und kreuzt zufällig an.

(i) Wählen Sie einen geeigneten Produktraum (Ω, P), eine Menge $\mathfrak{X}$ und eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathfrak{X}$, die das Problem modellieren.

(ii) Bestimmen Sie unter Verwendung von (i) die Wahrscheinlichkeit, daß Karin die Prüfung besteht.

Aufgabe 2:(*10 Punkte*) Ein Pokerspieler hat sich eine Standardstrategie zugelegt: immer wenn er ein Paar, zwei Paare, einen Drilling, einen Vierling oder ein Full House auf der Hand hat, hält er eben diese Karten und tauscht die übrigen.
Wie groß ist seine Chance, einen Drilling (aber keinen Vierling) oder ein Full-House zu haben?

Einige Erläuterungen zur Genetik
Wir gehen, wenn nichts anderes gesagt wird, stets von folgenden Annahmen aus: die uns interessierenden Gene sind autosomal, liegen also nicht auf den Geschlechtschromosomen, es gibt weder Mutation noch Selektion, eine Zuwanderung von neuem genetischen Material in das von uns betrachtete Gebiet ist ausgeschlossen. Eltern stammen stets aus derselben Generation und können sich untereinander beliebig paaren (Panmixie).

Ein Gen kann in $r \in \mathbb{N}$ vielen Ausprägungen (Allelen) vorliegen. Zur Bezeichnung dominanter Gene verwendet man Großbuchstaben, rezessive werden mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet.
Der menschliche Körper hat einen doppelten autosomalen Chromosomensatz, jedes solche Gen ist also doppelt vorhanden. Die Allele sind unabhängig voneinander.
Der Genotyp bestimmt den Phänotyp: liegt ein Gen in einer dominanten Ausprägung vor, so ist diese Ausprägung sichtbar/nachweisbar (eine Reihenfolge existiert also nicht).

Zwei Beispiele: für $r = 2$ erhalten wir das klassische Schema, das schon Mendel bekannt war. Die Zustandsformen eines Gens sind dann (in der Regel) A und a, mögliche Genotypen sind demnach AA, Aa und aa.
Für $r = 3$ können wir das Blutgruppensystem betrachten. Das Gen kann hier drei Ausprägungen A, B und 0=Null haben. Da alle Allele dominant sind, sind die Phänotypen gleich den Genotypen: AA, AB, $A0$, BB, $B0$ und 00.

Für die Fortpflanzung, also die Rekombination des Genmaterials, betrachten wir das folgende Schema: Zwei Eltern zeugen einen Nachwuchs. Dabei gibt jedes Elter genau einen Chromosomensatz an den Nachfolger. Dies enthält das betrachtete Gen in genau einer Ausprägung. Welches Gen weitergegeben wird, bestimmt der Zufall. Jede Ausprägung, die der Elter hat, wird also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ vererbt.

Aufgabe 3:(*20 Punkte*) In der Humangenetik spielt das Hardy-Weinberg-Gesetz eine große Rolle. Es beschreibt, wie sich die Rekombination von Genmaterial auf die relative Häufigkeit der r Ausprägungen eines Genes auswirkt.

(i) $r = 2$: In [I.2.8, Krengel; *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*] wird das Hardy-Weinberg-Gesetz wie folgt angegeben: Mit den relativen Häufigkeiten

Allelpaar	AA	Aa	aa
relative Häufigkeit	u	$2v$	w

ergeben sich in der k-ten Nachfolgegeneration die Wahrscheinlichkeiten

$$P_k(AA) = (u+v)^2 \ , \quad P_k(Aa) = 2(u+v)(v+w) \ , \quad P_k(aa) = (v+w)^2 \ .$$

Beschreiben Sie diese Aussage durch *einen* Parameter p mit $0 \leq p \leq 1$, und geben eine Interpretation von p als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

(ii) $r = 3$: Betrachten Sie das oben beschriebene Blutgruppensystem und nehmen Sie als Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots p_6$ für die verschiedenen Genotypen an. Berechnen Sie für die verschiedenen Paare (..) von Genotypen die Wahrscheinlichkeiten $P_k(..)$ bei zufälliger Paarung und zeigen Sie, daß das Hardy-Weinberg-Gesetz auch hier gilt.

Abgabe am 17.05.2004 vor der Vorlesung