UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler

Universität des Saarlandes, Gebäude 27 - Postfach 15 11 50 - D-66041 Saarbrücken

Saarbrücken, den 2. Juni 2003
Telefon: 0681/302-2494 (3430)
Fax: 0681/302-4443
e-mail: gekeler@math.uni-sb.de

Vorlesung Elementare Zahlentheorie SS 2003

Das Riemann-Stieltjes-Integral

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad f, \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Delta = (x_0, \dots, x_n)$ Unterteilung von I, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$\underline{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ Zwischenwerte, $\quad x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ $(0 \leq i < n)$

$$RS(\underline{\xi}, \Delta, f, \alpha) := \sum_{0 \leq i < n} f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)]$$

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)d\alpha(x) := \lim_{|\Delta| \to 0} RS(\underline{\xi}, \Delta, f, \alpha)$

(falls dieser Limes existiert unabhängig von der Wahl der Folge von Unterteilungen Δ, deren Feinheit $|\Delta|$ gegen 0 geht, und unabhängig von der Wahl der Zwischenwerte $\underline{\xi}$).

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)d\alpha(x)$

existiert, falls f stetig ist und α beschränkte Variation hat, oder falls α stetig ist und f beschränkte Variation hat.

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)d\alpha(x)$

ist in beiden Argumenten f, α linear.

(4) Ist f stetig und α von beschränkter Variation, so gilt für alle $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^c f(x)d\alpha(x) + \int_c^b f(x)d\alpha(x)$$

(5) Ist f stetig und α eine Treppenfunktion mit Sprungstellen $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} f(x_i)[\alpha(x_i+) - \alpha(x_i-)].$$

Dabei ist für eine Funktion β und $x \in \mathbb{R}$:

$$\beta(x+) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \beta(x + h), \quad \beta(x-) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \beta(x - h).$$

(6) Ist f stetig und α stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

(7) Ist f von beschränkter Variation und α stetig, so gilt:

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)df(x).$$

(8) Sei f stetig und α von beschränkter Variation. Für

$$F(x) := \int_a^x f(t)d\alpha(t) \quad (x \in I)$$

gelten:

(i) F hat beschränkte Variation (ist aber i.a. nicht stetig!);
(ii) $F(x+) - F(x) = f(x)[\alpha(x+) - \alpha(x)]$, $x \in [a, b)$;
(iii) $F(x) - F(x-) = f(x)[\alpha(x) - \alpha(x-)]$, $x \in (a, b]$.

Schreibe $\displaystyle\int_{a+}^b f(x)d\alpha(x)$ für $F(b) - F(a+)$, $\int_a^{b-} f(x)d\alpha(x)$ für $F(b-)$ etc.

Beweise und Ergänzungen finden sich z.B. in D.V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press 1946, Kapitel I.

Dazu gehören insbesondere:

- Abschätzungen für $\displaystyle\int_a^b f(x)d\alpha(x)$, falls Abschätzungen für f und α vorliegen;
- Vertauschung von Summen mit Integralen;
- Substitutionsregel;
- uneigentliche RS-Integrale