Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. M. Gebhardt

1. Übung zur elementaren Zahlentheorie, SS 2003

Aufgabe 1:(*10 Punkte*)
Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für alle $j \in \mathbb{Z}$ ist durch

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ \overline{a} & \mapsto & \overline{aj} \end{array}$$

ein Homomorphismus gegeben. Es gilt

$$\varphi \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ggT}(m,j) = 1 \quad .$$

Aufgabe 2:(*10 Punkte*)

a) Zeigen Sie die "3-er Regel", also daß für eine beliebige ganze Zahl

$$a := \pm \sum_{i=0}^{s} a_i \cdot 10^i, \quad a_i, s \in \mathbb{N}_0,\ a_i \leq 9,$$

gilt: $3|a$ genau dann, wenn $3|\ \sum_{i=0}^{s} a_i$.

b) Für die Teilbarkeit durch 7 ergibt sich die Regel:

$$7|(b_0 + 100 \cdot b_1 + \ldots + 100^n \cdot b_n) \quad \text{genau dann, wenn} \quad 7|(b_0 + 2 \cdot b_1 + \ldots + 2^n \cdot b_n),$$

wobei die $b_i \in \mathbb{N}_0$ kleiner 100 sind.

Aufgabe 3:(*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie das (multiplikativ) Inverse zu $\overline{41}$ in $\mathbb{Z}/94\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.
b) Bestimmen Sie alle (multiplikativ) invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$.
c) Zeigen Sie: 36 teilt $1349^{445} + 67^{843}$.

Aufgabe 4:(*10 Punkte*)

a) Kürzen Sie (ohne Verwendung eines Computers) den Bruch

$$\frac{91374}{184203}$$

vollständig. (Hinweis: Es ist nicht zu erwarten, daß Sie die vollständige Faktorisierung von Zähler oder Nenner finden.)

b) Zeigen Sie, daß $\sqrt{p}$ keine rationale Zahl ist für alle Primzahlen p.

Abgabe am 09. Mai 2003 vor der Vorlesung