



2. Übung zur elementaren Zahlentheorie, SS 2003

Aufgabe 1: (10 Punkte) Auf einem Seeräuberschiff war es üblich, die Beute zu gleichen Teilen unter den Räufern zu verteilen und etwaige Reste dem Koch zu überlassen. Auf einer Kaperfahrt wurde ein Schatz von Goldstücken geraubt. Der Koch konnte sich ausrechnen, davon 3 zu erhalten, da 27 Räuber an Bord waren. Bei der Beutefeier kam es zu Gewalttätigkeiten, denen 7 Räuber zum Opfer fielen. Danach hatte der Koch nur ein Goldstück zu erwarten. Das Schiff lief auf ein Korallenriff, 7 weitere Räuber ertranken, aber Schatz und Koch wurden gerettet. Allerdings erhielt der Koch nun gar nichts mehr von dem Schatz. Wie groß war der Schatz, wenn man bedenkt, daß der Koch nur bis 5000 zählen konnte?

Bei welchen anderen Verläufen des Auflaufens auf das Riff hätte dem Koch dasselbe Malheur passieren können?

Aufgabe 2: (10 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Kongruenzen lösbar sind, und bestimmen Sie ggfs. alle Lösungen:

$$\begin{array}{lll} a) & 7x \equiv 9 \pmod{13} & b) & 4x^2 \equiv 3 \pmod{13} & c) & 3x^3 \equiv 8 \pmod{13} \\ d) & 6x^3 \equiv 7 \pmod{13} & e) & 10x^2 \equiv 7 \pmod{13} & f) & 8 \cdot 7^x \equiv 3 \pmod{13} \end{array}$$

Aufgabe 3: (10 Punkte) Sei $3 < p$ eine Primzahl. Zeigen Sie, daß das Produkt über alle Primitivwurzeln von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kongruent 1 modulo p ist.

Aufgabe 4: (10 Punkte) Zeigen Sie: Für $m = n \cdot n'$ mit $\text{ggT}(n, n') = 1$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* &\longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \\ x \pmod{m} &\mapsto x \pmod{n} \end{aligned}$$

ein surjektiver Homomorphismus. Bestimmen Sie den Kern, und geben Sie einen Homomorphismus

$$\psi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \longrightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$$

an, so daß $\phi \circ \psi = \text{id}_{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*}$ ist.

Abgabe am 16. Mai 2003 vor der Vorlesung