Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. M. Gebhardt

3. Übung zur elementaren Zahlentheorie, SS 2003

Aufgabe 1:(*12 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Die Gleichung $x^2 \equiv 137\,629 \mod 163\,841$ ist lösbar.

b) Zeigen Sie: Die Gleichung $x^2 \equiv 15 \mod 163\,841$ ist nicht lösbar.

c) Ist die Gleichung $x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \mod 127$ lösbar?

d) Berechnen Sie $\left(\frac{3}{35}\right)$ und zeigen Sie, daß 3 kein Quadrat modulo 35 ist.

(Bemerkung: 163 841 ist die 15 000-te Primzahl.)

Aufgabe 2:(*8 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß das Polynom $x^4 - 117x^3 + 9x^2 + 27x - 12 \in \mathbb{Z}[x]$ keine ganzzahlige Nullstelle hat.

b) Zeigen Sie, daß für alle $n, m \in \mathbb{N} - \{1\}$ gilt

$$\varphi(n) \cdot \varphi(m) = \varphi(\mathrm{ggT}\,(n,m)) \cdot \varphi(\mathrm{kgV}(n,m)) \quad .$$

Dabei bezeichnet $\varphi(n) := \#\{k \in \mathbb{N} \mid 0 < k < n,\ \mathrm{ggT}\,(k,n) = 1\}$.

Aufgabe 3:(*10 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Es existieren unendlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{P}$ mit

$$p \equiv 2 \mod 3.$$

b) Inwiefern läßt sich der Beweis verallgemeinern?

Aufgabe 4:(*10 Punkte*) Sei $1 < n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}\,(n,2) = 1$. Zeigen Sie die beiden Ergänzungssätze für das Jacobisymbol

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \qquad , \qquad \left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad .$$

Abgabe am 23. Mai 2003 vor der Vorlesung