Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. M. Gebhardt

5. Übung zur elementaren Zahlentheorie, SS 2003

Aufgabe 1:(*10 Punkte*)

a) Ist 2 ein Miller-Rabin-Zeuge für die Zerlegbarkeit von 85 ?

b) Ist 13 ein Miller-Rabin-Zeuge für die Zerlegbarkeit von 85 ?

c) Zeigen Sie, daß für alle ungeraden $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ die Zahl $n-1$ kein Miller-Rabin-Zeuge für die Zerlegbarkeit von n ist.

Aufgabe 2:(*10 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß für $n = 3372149$

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^4 + y^4 = n\big\} = \emptyset$$

gilt. Geben Sie (mit Begründung) ein $n > 10^{11}$ an, für das die obige Menge ebenfalls leer ist.

b) Finden Sie eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 3445 \quad .$$

Aufgabe 3:(*20 Punkte*) Unter *Quaternionen* versteht man Ausdrücke der Form $x = x_0 + i \cdot x_1 + j \cdot x_2 + k \cdot x_3$, wobei $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sind. Die Menge aller Quaternionen wird mit $\mathbb{H}$ bezeichnet. Man kann Quaternionen komponentenweise addieren und mit Elementen aus $\mathbb{R}$ multiplizieren. Daher ist $\mathbb{H}$ ein vierdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Unter Verwendung der üblichen Rechenregeln kann man zwei Quaternionen multiplizieren, wobei

$$r \cdot a = a \cdot r \quad \forall r \in \mathbb{R},\ a \in \{i,j,k\}$$

und

$$i^2 = j^2 = -1, \quad ij = -ji = k$$

gelten soll. Zu einem $x \in \mathbb{H}$ heißt $\bar{x} := x_0 - i \cdot x_1 - j \cdot x_2 - k \cdot x_3$ das konjugierte Element und $N(x) := x\overline{x}$ die Norm von x. Weiter wird $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{H}$ identifiziert.

a) Zeigen Sie, daß $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins ist.
(Bemerkung: Verwenden Sie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\phi : \mathbb{H} \to \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}), \quad 1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \quad , i \mapsto \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \quad , j \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad , k \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

)

b) Zeigen Sie, daß die Multiplikation in $\mathbb{H}$ nicht kommutativ ist.

c) Zeigen Sie: $\mathrm{Zent}(\mathbb{H}) := \{y \in \mathbb{H} \mid yx = xy\ \forall x \in \mathbb{H}\} = \mathbb{R}$.

d) Zeigen Sie: $\overline{xy} = \overline{y} \cdot \overline{x}$.

e) Berechnen Sie $N(x)$.

f) Zeigen Sie, daß $N(xy) = N(x) \cdot N(y)$ gilt und daß aus dieser Gleichheit die Regeln aus Satz (5.7) folgen.

g) Zeigen Sie, daß alle Elemente aus $\mathbb{H} - \{0\}$ multiplikativ invertierbar sind .

h) Schreiben Sie 817 als Summe von 4 Quadraten.

Abgabe am 06. Juni 2003 vor der Vorlesung