Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. M. Gebhardt

6. Übung zur elementaren Zahlentheorie, SS 2003

Aufgabe 1:(*8 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß in $\mathbb{C}[[X]]$ die Identität $\sum_{i=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X}$ gilt.

b) Sei $a \in \mathbb{C} - \{0\}$. Wie lautet die Taylorentwicklung im Punkt 0 von $\frac{1}{X+a} \in \mathbb{Q}(X)$?

c) Wie lautet die Taylorentwicklung im Punkt 0 von $\frac{1}{X^2-3X+2} \in \mathbb{Q}(X)$?

Aufgabe 2:(*7 Punkte*) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \in \mathbb{Q}[[X]]$ die multiplikativ inverse Potenzreihe zu $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2)X^n \in \mathbb{Q}[[X]]$. Berechnen Sie $b_0, b_1, \ldots, b_4$.

Aufgabe 3:(*7 Punkte*) Bestimmen Sie das multiplikativ Inverse der formalen Potenzreihe $f(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} X^n$.

Aufgabe 4:(*8 Punkte*) Finden Sie einen rationale Ausdruch $\frac{f(X)}{g(X)} \in \mathbb{Q}(X)$, dessen Taylorentwicklung im Punkt 0 gerade $\sum_{n=0}^{\infty} nX^n$ ist.

Aufgabe 5:(*10 Punkte*) Sei $N \in \mathbb{N}$, B_k die k-te Bernoulli-Zahl und $B_k(X)$ das k-te Bernoulli-Polynom. Zeigen Sie:

a) $B_k(X) = (-1)^k B_k(1-X)$,

b) $N^{k-1} \sum_{i=0}^{N-1} B_k(X + \frac{i}{N}) = B_k(NX)$,

c) $B_k(\frac{1}{2}) = -(1-2^{1-k})B_k$,

d) $B_{2k}(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2}(1-3^{1-2k})B_{2k}$.

(Bemerkung: Häufig wird ,,Bestimmen Sie die Taylorentwicklung im Punkt 0 von XXX." durch ,,Bestimmen Sie die formale Potenzreihe zu XXX." abgekürzt.)

Abgabe am 13. Juni 2003 vor der Vorlesung