Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. M. Gebhardt

## 7. Übung zur elementaren Zahlentheorie, SS 2003

**Aufgabe 1**:(*10 Punkte*) Die Fibonacci-Zahlen $F_n$ sind definiert durch

$$F_0 = 0 \quad , F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad .$$

Finden Sie einen rationalen Ausdruck $\frac{f(X)}{g(X)} \in \mathbb{Q}(X)$, dessen Potenzreihe gerade $\sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n$ ist.

**Aufgabe 2**:(*10 Punkte*) Finden Sie alle $f(X) \in \mathbb{C}[[X]]$, die die Differentialgleichung $f'(X) = 2Xf(X)$ erfüllen.

**Aufgabe 3**:(*10 Punkte*) Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & , \quad x \leq 1 \\ ln(x) & , \quad 1 < x < 2 \\ 2 & , \quad 2 < x \end{cases} \quad .$$

Berechnen Sie die folgenden Riemann-Stieltjes Integrale:

a) $\int_{-2}^{3} x^2 d|x|$,

b) $\int_{1}^{2} x^2 d(ln(x))$,

c) $\int_{0}^{2} x^2 d(x + g(x))$.

**Aufgabe 4**:(*10 Punkte*) Berechnen Sie die Funktion

$$F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x t \; d[t] \quad .$$

Ist $F$ stetig? Geben Sie $F(3.9)$, $F(4)$ und $F(4.1)$ an.

---

**Hinweise**:

a) Zu den Ergänzungen zum Riemann-Stieltjes-Integral: Der Punkt (5) ist zu lesen als: Ist $f$ stetig und $\alpha$ eine Treppenfunktion mit Sprungstellenmenge $S \subset \mathbb{R}$. Seien $a, b \notin S$ und $S \cap (a, b) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ endlich. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} f(x_i)[\alpha(x_i+) - \alpha(x_i-)].$$

b) Sie dürfen verwenden, daß alle auf diesem Blatt auftretenden Funktionen beschränkte Variation haben.

**Abgabe am 20. Juni 2003 vor der Vorlesung**