Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. M. Gebhardt

8. Übung zur elementaren Zahlentheorie, SS 2003

Aufgabe 1:(*15 Punkte*) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine ganze Zahl nicht durch die ersten n-Primzahlen teilbar ist? D.h., zeigen Sie, daß der folgende Grenzwert existiert und berechnen Sie seinen Wert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\#\{1 \leq m \leq x \mid ggT(m, p_k) = 1 \ \forall 1 \leq k \leq n\}}{\#\{1 \leq m \leq x\}} \quad .$$

Hierbei bezeichnen $p_1, \ldots, p_n$ die ersten n Primzahlen.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ an.

Aufgabe 2:(*15 Punkte*) Zeigen Sie, daß für die Fibonacci-Zahlen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\omega_1^n} - \frac{1}{\omega_2^n} \right)$$

gilt mit $\omega_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und $\omega_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Geben Sie (unter Verwendung eines Taschenrechners) eine Vermutung ab, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Dezimalentwicklung von F_n 100 Stellen hat. (Hinweis: Übung 6, Aufgabe 1)

Aufgabe 3:(*10 Punkte*) (Wiederholung/Ergänzung) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Seien p und q Primzahlen größer als 3. Dann ist

$$p^2 - q^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 24) \ .$$

b) Es seien a und b teilerfremde ganze Zahlen. Dann ist

$$\mathrm{ggT}(a + b,\ a^2 + b^2) \in \{1, 2\} \ .$$

c) Es seien n eine natürliche Zahl, und $T_n := \{d \in \mathbf{N} \mid d \text{ teilt } n\}$. Zeigen Sie:

$$\left(\prod_{d \in T_n} d \right)^2 = n^{\# T_n} \ .$$

Abgabe am 27. Juni 2003 vor der Vorlesung