Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. M. Gebhardt

9. Übung zur elementaren Zahlentheorie, SS 2003

Aufgabe 1:(*10 Punkte*) Zeigen Sie:

$$\sum_{m>k} \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{k}$$

Aufgabe 2:(*10 Punkte*) Es bezeichne p_k die k-te Primzahl. Zeigen Sie:

a) $\pi(p_1 p_2 \cdots p_m) \geq 2m+4$ für $m \geq 3$.

b) $p_{m+1}^2 < p_1 p_2 \cdots p_m$ für $m \geq 4$.

(Hinweis: Nutzen Sie die (bewiesene) Bertrand'sche Vermutung, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ existiert.)

Aufgabe 3:(*10 Punkte*) In der ganzen Aufgabe sind f, g, h Funktionen auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $f, g = O(h) \Rightarrow f + g = O(h)$

b) $f = O(g),\ g = O(h) \Rightarrow f = O(h)$

c) $f = O(g) \Rightarrow fh = O(gh)$

d) die gültigen unter den folgenden Implikationen

$$f = O(g) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f+h = O(g+h) \\ f+h = O(|g+h|) \\ f+h = O(|g|+|h|) \end{array}$$

e) $\sum_{i=0}^{d} a_i n^i = O(n^d)$ ($a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ beliebig)

f) Sind $a, b > 0$, so gilt $\log_a(n) = O(\log_b(n))$.

Aufgabe 4:(*10 Punkte*) Seien f und g die Funktionen $f(x) = x^a$ und $g(x) = x^b$ auf einer Teilmenge D von $\mathbb{R}_{>0}$, mit $0 < a < b$. Unter welchen Voraussetzungen an D gilt

a) $f = O(g)$?

b) $g = O(f)$?

Abgabe am 04. Juli 2003 vor der Vorlesung