Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. M. Gebhardt

10. Übung zur elementaren Zahlentheorie, SS 2003

Aufgabe 1:(*10 Punkte*) Beweisen Sie (mit Hilfe eines Taschenrechners), daß über 1 Prozent aller 40 stelligen natürlichen Zahlen Primzahlen sind.

Aufgabe 2:(*10 Punkte*) Zeigen Sie, daß unter der Annahme $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ für die Größe der n-ten Primzahl $p_n \sim n \ln(n)$ gilt.

Aufgabe 3:(*10 Punkte*) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f, g : [c, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Funktionen mit

- $g(x) > 0 \; \forall x \in [c, \infty)$,
- für alle $x \in [c, \infty)$ existieren $\int_c^x f(t)dt$ und $\int_c^x g(t)dt$,
- $\lim_{x\to\infty} \int_c^x g(t)dt = \infty$.

Dann gilt:

a) $f = o(g) \;\Rightarrow\; \int_c^x f(t)dt = o(\int_c^x g(t)dt)$,
b) $f \sim g \;\Rightarrow\; \int_c^x f(t)dt \sim \int_c^x g(t)dt$

Aufgabe 4:(*10 Punkte*) Sei α aus dem Intervall $(-1, \infty)$. Zeigen Sie, daß aus $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$

$$\sum_{p \leq x,\ p\ prim} p^\alpha \sim \frac{1}{1+\alpha} \frac{x^{1+\alpha}}{\ln(x)}$$

folgt. (Hinweis: Schreiben Sie die Summe als ein Riemann-Stieltjes-Integral, zeigen Sie $\int_2^x \frac{t^\alpha}{\ln(t)}dt \sim \frac{1}{1+\alpha} \frac{x^{1+\alpha}}{\ln(x)}$, und verwenden Sie dies zum Beweis der Aussage.)

Abgabe am 11. Juli 2003 vor der Vorlesung