Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. M. Gebhardt

11. Übung zur elementaren Zahlentheorie, SS 2003

Aufgabe 1:(*10 Punkte*)

a) Zeigen Sie: $\sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\sigma(d) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Es sei $\Psi : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Weiter sei

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \quad n \mapsto \sum_{k=1}^{n} \Psi(\frac{k}{n})$$

und

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \quad n \mapsto \sum_{1 \leq r \leq n,\ ggT(r,n)=1} \Psi(\frac{r}{n})$$

Zeigen Sie: Dann gilt

$$f(n) = \sum_{t|n} \mu(t) g(\frac{n}{t}) = \sum_{t|n} \mu(\frac{n}{t}) g(t) \quad .$$

Aufgabe 2:(*10 Punkte*) In der Vorlesung wurden die Funktionen

$$\begin{aligned} \omega(n) &= \#\{p \in \mathbb{P} \mid n \equiv 0 \bmod p\} \\ \tau(n) &= \#\{d \in \mathbb{N} \mid n \equiv 0 \bmod d\} \\ \Omega(n) &= \#\{p^a \mid p \in \mathbb{P}, a \in \mathbb{N}, n \equiv 0 \bmod p^a\} \end{aligned}$$

eingeführt. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq 2^{\Omega(n)}$$

gilt.

Aufgabe 3:(*10 Punkte*) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{6}{\pi^2} n^2 < \sigma(n)\varphi(n) < n^2$$

gilt.

Aufgabe 4:(*10 Punkte*) In der Vorlesung wurde die Ring $\mathfrak{A} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$ mit der üblichen Additon und der Multiplikation $(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$ eingeführt. Die Einheitengruppe dieses Rings ist $\mathfrak{A}^* = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid f(1) \neq 0\}$. Zeigen Sie, daß

$$\mathfrak{M} := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist schwach multiplikativ}\}$$

eine Untergruppe von $\mathfrak{A}^*$ ist.

Abgabe am 18. Juli 2003 vor der Vorlesung

b.w.

Hinweis zur Klausur zur Elementaren Zahlentheorie

a) Die Klausur zur Elementaren Zahlentheorie wird am Freitag, dem **25.07.03** im **Hörsaal III** der Mathematik geschrieben.

b) Die Klausur beginnt **pünktlich** um **11.15** Uhr und endet um 13.15 Uhr. Daher sollten sich alle Teilnehmer bis spätestens **11.10 Uhr** vor dem HS III eingefunden haben.

c) Da jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt zu bearbeiten ist, muß genügend Papier mitgebracht werden.

d) Es sind Personalausweis und Studierendenausweis mitzubringen.

e) Schriftliche Hilfsmittel in jeglicher Form (Skript, Bücher, Mitschriften, Übungen etc.) sind erlaubt.

f) Elektronische Hilfsmittel in jeglicher Form (Taschenrechner, Computer, Handy etc.) sind **nicht erlaubt**.

g) Die Klausur erstreckt sich über den Stoff der gesamten Vorlesung.

h) Es werden sechs Aufgaben angeboten. Vollständige und erfolgreiche Bearbeitung von vieren davon reicht für die Note „sehr gut".

i) Jede Person, die **regelmäßig** an den Übungen teilgenommen, mindestens 200 Übungspunkte erreicht und einmal an der Tafel vorgerechnet hat, ist zur Klausur zugelassen. Eine Liste mit den zur Klausur zugelassenen Personen wird am Mittwoch, dem 16.07.03 am Schwarzen Brett ausgehangen. Bei Unklarheiten kann bei Herrn Gebhardt nachgefragt werden.

j) Die Ergebnisse werden spätestens am Dienstag, dem 29.07.03 ausgehangen und auf der Internetseite der Vorlesung veröffentlicht. Die Klausureinsicht findet ebenfalls am Dienstag, dem 29.07.03 im Gebäude 27.1 Seminarraum 3 um 13.00 c.t statt.

k) Zur Wiederholung oder zur Ergebnisverbesserung gibt es voraussichtlich am Dienstag, dem 07.10.2003 die Möglichkeit zu einer Nachprüfung. Wer an der Nachprüfung teilnehmen möchte, muß sich bis zum 15.09.2003 persönlich oder per email (gekeler@math.uni-sb.de) anmelden. Einzelheiten zur Ausführung der Nachprüfung werden rechtzeitig durch Aushang und Veröffentlichung auf der Internetseite bekanntgegeben.

l) Die Scheine können im Wintersemester im Geschäftszimmer der Mathematik abgeholt werden. In dringenden Fällen setzen Sie sich bitte mit Prof. Gekeler in Verbindung.