Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 2

Aufgabe 1. *(3 + 4 + 4 + 4= 15 Punkte)* Es sei $\mathfrak{P}_n := \mathfrak{P}(\mathbb{N}_n)$ die Potenzmenge der Menge $\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$. $\mathfrak{P}_n$ sei im Folgenden stets mit der Ordnung $\subset$ versehen.

a) Beweisen Sie, dass durch $\{\emptyset, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, ..., \mathbb{N}_n\}$ eine maximale Kette in $\mathfrak{P}_n$ gegeben ist, d.h. es gilt $l(\mathfrak{P}_n) = n + 1$.

b) Wir wählen nun eine beliebige Antikette $A \subset \mathfrak{P}_n$ in $\mathfrak{P}_n$ aus und setzen

$$\alpha_k := |\{a \in A : |a| = k\}|$$

für alle $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

i) Für jede Permutation σ von $\mathbb{N}_n$ bilden wir die Kette

$$C_\sigma := \{\sigma(\emptyset), \sigma(\mathbb{N}_1), \sigma(\mathbb{N}_2), ..., \sigma(\mathbb{N}_n)\}$$

in $\mathfrak{P}_n$ und definieren eine Abbildung $1_\sigma : A \to \mathbb{R}$ durch

$$1_\sigma(a) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in C_\sigma, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie für feste $\sigma_0 \in S_n$ und $a_0 \in A$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} 1_{\sigma_0}(a) &\leq 1 \text{ und} \\ \sum_{\sigma \in S_n} 1_\sigma(a_0) &= |a_0|!(n - |a_0|)! \,. \end{aligned}$$

ii) Schätzen Sie nun $n!$ mit Hilfe von i) geeignet nach unten ab, um die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\binom{n}{k}} \leq 1 \tag{1}$$

zu erhalten.

iii) Folgern Sie aus der Ungleichung 1 die Beziehung

$$|A| \leq \binom{n}{[n/2]} \text{ und schließen Sie daraus } w(\mathfrak{P}_n) = \binom{n}{[n/2]} \,.$$

Aufgabe 2. *(7 Punkte)* Gegeben seien n positive reelle Zahlen $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Zeigen Sie, dass unter den Zahlen $\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + ... + \epsilon_n a_n$ mit $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ eine beliebig vorgegebene Zahl höchstens $\begin{pmatrix} n \\ [n/2] \end{pmatrix}$ mal vorkommen kann. (Hinweis: Versuchen Sie eine Verbindung zu Aufgabe 1 zu schaffen)

Aufgabe 3. *(10 Punkte)* Es sei X eine Menge mit $n^2 + 1$ Elementen. Ferner seien auf X zwei vollständige (!) Ordnungen $\ll, \prec$ gegeben. Zeigen Sie, dass X eine Teilmenge T mit $n + 1$ Elementen besitzt, so dass für alle $x, y \in T$

$$x \ll y \Rightarrow x \prec y$$

gilt, oder dass für alle $x, y \in T$

$$x \ll y \Rightarrow y \prec x$$

gilt. (Hinweis: Nutzen Sie das Dilworth Lemma)

Aufgabe 4. *(8 Punkte)* Beschreiben Sie die Graphen auf $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ bis auf Isomorphie.

Abgabe: Donnerstag, den 2. November 2006 (vor der Vorlesung)
Homepage: http://www.math.uni-sb.de/ag/gekeler/LEHRE/Kombinatorik/KombinatorikWS06.html