Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

# Übung 3

**Aufgabe 1**. *(8 Punkte)* Es seien $m, n$ natürliche Zahlen. Zeigen sie, dass es eine Folge reeller Zahlen der Länge $mn$ gibt, die weder eine monoton steigende Teilfolge der Länge $m+1$ noch eine monoton fallende Teilfolge der Länge $n+1$ besitzt.

**Aufgabe 2**. *(8 Punkte)* $r$ Maler benutzen zusammen $s$ Farben. Jeder Maler benutzt genau drei Farben und jede Farbe wird auch von genau drei Malern benutzt. Ferner benutzen je zwei Maler zusammen genau vier Farben. Welche Paare $(r, s)$ können vorkommen?

**Aufgabe 3.** *(10 Punkte)* Zeigen Sie $R(3,5) = 14$.

**Aufgabe 4**. *(3+4+4+3=14 Punkte)* Für jede natürliche Zahl $n$ setzen wir

$$R_3(n) := \quad R(\underbrace{3, 3, ..., 3}_{n \text{ mal}}) \, .$$

(Bekanntlich gelten $R_3(1) = 3$ und $R_3(2) = 6$)

a) Es sei $\alpha(1) := 3$ und für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ sei $\alpha(n)$ die minimale natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass jeder Knoten eines $n-$gefärbten $K_{\alpha(n)}$ wenigstens $\alpha(n-1)$ weglaufende monochrome Kanten besitzt. $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist wohldefiniert, was man z.B. mit dem Schubfachprinzip sicherstellt.

   i) Zeigen Sie für $n \geq 1$ die Beziehung

   $$\alpha(n+1) = (n+1)(\alpha(n) - 1) + 2 \, .$$

   Folgern Sie daraus die Identität $\alpha(n) = [en!] + 1$. (Dabei ist $e = 2.7182...$ die *Eulersche Zahl* )

   ii) Beweisen Sie, dass jede $n-$Färbung eines $K_{\alpha(n)}$ einen monochromen $K_3$ enthält. Insbesondere gilt also $R_3(n) \leq [en!] + 1$.

b) Man nennt eine Teilmenge $M$ von $\mathbb{N}$ *summenfrei*, falls die Gleichung $a + b = c$ mit $a, b, c \in M$ nicht erfüllt werden kann. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\beta(n)$ die maximale natürliche Zahl, so dass die Menge $\mathbb{N}_{\beta(n)}$ disjunkt in $n$ summenfreie Teilmengen zerlegt werden kann. $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist wohldefiniert, was wiederum eine Konsequenz des Schubfachprinzips ist. (Es gelten z.B. $\beta(1) = 1, \beta(2) = 4$ und $\beta(3) = 13$)

   i) Zeigen Sie die Ungleichung $R_n(3) \geq \beta(n) + 2$.
   (Hinweis: Konstruieren sie eine $n-$Färbung eines $K_{\beta(n)+1}$ ohne monochrome Dreiecke, indem Sie die Eigenschaften von $\beta$ benutzen)

ii) Begründen Sie, dass die Menge $\{1, 2, 3, ..., (3^n - 1)/2\}$ sich stets in $n$ disjunkte, summenfreie Mengen zerlegen lässt. D.h. wir haben insbesondere $(3^n + 3)/2 \leq R_3(n)$.
(Hinweis: Zeigen Sie $\beta(n+1) \geq 3\beta(n)+1$, indem Sie sich aus einer gegebenen Zerlegung von $\mathbb{N}_{\beta(n)}$ in $n$ disjunkte, summenfreie Teilmengen eine Zerlegung von $\mathbb{N}_{3\beta(n)+1}$ in $n+1$ disjunkte, summenfreie Teilmengen verschaffen)

**Abgabe:** Donnerstag, den 9. November 2006 (vor der Vorlesung)
**Homepage:** http://www.math.uni-sb.de/ag/gekeler/LEHRE/Kombinatorik/KombinatorikWS06.html