Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 6

Aufgabe 1. *(15 Punkte)* Es sei a_n die Anzahl der Permutationen σ von $\mathbb{N}_{2n}$, für die es wenigstens ein $i \in \mathbb{N}_{2n-1}$ mit $|\sigma(i+1) - \sigma(i)| = n$ gibt. Zeigen Sie $|a_n| > (2n)!/2$ und bestimmen Sie den Limes von $P_n := a_n/(2n)!$ für $n \to \infty$.
(Hinweis: Drücken Sie a_n mit Hilfe der Siebformel aus)

Aufgabe 2. *(10 Punkte)* Bestimmen Sie die Anzahl N der verschiedenen Perlenketten mit 3 blauen, 2 grünen und einer weißen Perle wie folgt: Betrachten Sie ein in der Ebene liegendes, regelmäßiges 6-Eck E mit den Ecken 1,2,3,4,5,6 und ermitteln Sie seine Symmetriegruppe G. Die Gruppe G operiert in natürlicher Weise auf der Menge $X := \{f : \mathbb{N}_6 \to \mathbb{N}_3 : |f^{-1}(1)| = 3, |f^{-1}(2)| = 2, |f^{-1}(3)| = 1\}$. Listen Sie schließlich die Bahnen von X unter G auf.
(Die Bahnenanzahl liefert Ihnen offensichtlich das gesuchte N)

Aufgabe 3. *(4+4+4+3=15 Punkte)* Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen, G die Gruppe $\mathrm{GL}(n, K)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und V der $K-$Vektorraum K^n der Dimension n. Seien $n_1, n_2, ..., n_r \in \mathbb{N}$ mit $\sum n_i = n$ gegeben. Eine *Fahne vom Typ* $\underline{n} = (n_1, n_2, ..., n_r)$ ist eine Folge von Unterräumen $U_1, U_2, ..., U_r$ von V mit

- $U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_r = V$ und
- $\dim(U_i) = n_1 + ... + n_i$ für $i = 1, 2, ..., r$.

Die Menge der Fahnen vom Typ $\underline{n}$ heiße *Fahnenmannigfaltigkeit* $F_{\underline{n}}(K)$. (Gilt $\underline{n} = (n_1, n_2)$, so heißt $F_{\underline{n}}(K) = \{U \subset V : \dim(U) = n_1\}$ *Grassman-Mannigfaltigkeit mit den Parametern* (n, n_1). Insbesondere ist die Grassmann-Mannigfaltigkeit mit den Parametern $(n, 1)$ gerade der projektive Raum $\mathbb{P}^n(K)$ der Dimension n über K)

a) Bestimmen Sie die Ordnung von G!

b) Zeigen Sie: Für jeden Typ $\underline{n}$ operiert G transitiv auf $F_{\underline{n}}(K)$ (d.h. G besitzt nur eine Bahn auf $F_{\underline{n}}(K)$).

c) Sei $\underline{U} = (U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_r)$ die *Standard-Fahne* vom Typ $\underline{n}$, d.h. es sei $U_i = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in V : a_j = 0 \text{ für } j > n_1 + n_2 + ... + n_i\}$ für $i = 1, 2, .., r$. Berechnen Sie die Fixgruppe von $\underline{U}$ in G!

d) Bestimmen Sie $|F_{\underline{n}}(K)|$, d.h. berechnen Sie diese Zahl aus dem Datum $\underline{n}$.

Abgabe: Donnerstag, den 30. November 2006 (vor der Vorlesung)
Homepage: http://www.math.uni-sb.de/ag/gekeler/LEHRE/Kombinatorik/KombinatorikWS06.html