Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 7

Aufgabe 1. *(9+6+5=20 Punkte)* Für $\pi \in S_n$ sei $i(\pi)$ die Zahl der Inversionen von π.

a) Zeigen Sie $i(\pi) = i(\pi^{-1})$ sowie

$$\sum_{\pi \in S_n} X^{i(\pi)} = \underbrace{(1+X)\cdot(1+X+X^2)\cdot ... \cdot(1+X+...+X^{n-1})}_{(n-1)\text{ Faktoren}} .$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Beschreibung von π durch die Inversionstafel $I(\pi)$)

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert für $i(\pi)$, wobei π eine zufällig gewählte Permutation aus S_n ist.

c) Seien $i < j$ aus $\mathbb{N}_n$ gegeben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für ein zufällig gewähltes $\pi \in S_n$ gilt $\pi(i) > \pi(j)$.

Aufgabe 2. *(4+4 = 8 Punkte)*

a) Wieviele Elemente der S_{15} haben Ordnung 105?

b) Wieviele Elemente der Ordnung 3 gibt es in S_9?

Aufgabe 3. *(12 Punkte)* Beweisen Sie für $k, n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$1^k + 2^k + ... + n^k = \sum_{i=1}^{k} S(k,i) \binom{n+1}{i+1} i!\,.$$

Abgabe: Donnerstag, den 7. Dezember 2006 (vor der Vorlesung)
Homepage: http://www.math.uni-sb.de/ag/gekeler/LEHRE/Kombinatorik/KombinatorikWS06.html