Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 8

Aufgabe 1. *(10 Punkte)* Wieviele verschiedene Möglichkeiten haben Sie, n ununterscheidbare Kugeln in m Körbe zu werfen, so dass in jedem Korb eine ungerade Anzahl von Kugeln liegt?

Aufgabe 2. *(8 Punkte)* Es sei X eine endliche (!) Menge. Bekanntlich ist dann eine *Topologie auf* X gegeben durch eine Menge $T \subset \mathfrak{P}(X)$ mit

- $\emptyset, X \in T$,
- $A, B \in T \Rightarrow A \cap B \in T$,
- $A, B \in T \Rightarrow A \cup B \in T$.

Geben Sie eine Bijektion zwischen den Topologien auf X und den reflexiven und transitiven Relationen auf X an. (Hinweis: Betrachten Sie zu einer gebenen Relation $R \subset X \times X$ Mengen $A \subset X$ mit der Eigenschaft, dass $y \in A$ dann gilt, falls es ein $x \in A$ mit yRx gibt)

Aufgabe 3. *(12 Punkte)* Es sei wieder X eine endliche Menge ($|X| = m$). Eine *Algebra auf* X ist gegeben durch eine Menge $\Sigma \subset \mathfrak{P}(X)$ mit

- $\emptyset, X \in \Sigma$,
- $A \in \Sigma \Rightarrow X - A \in \Sigma$,
- $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$.

Die Gruppe $G := Sym(X)$ operiert in natürlicher Weise auf der Menge aller Algebren auf X. Liegen zwei Algebren in der gleichen Bahn unter G, so heißen sie *isomorph* zueinander.

a) Wieviele Algebren auf X gibt es?

b) Was ist die Anzahl der Isomorphieklassen von Algebren auf X?

(Hinweis: Sie dürfen Ihre Ergebnisse zu a) und b) gerne in Termen von bekannten, in der Vorlesung definierten Funktionen (wie etwa $p(n), S(n,k), s(n,k), c(n.k), B(n), ...$) formulieren)

Aufgabe 4. *(10 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Zahl der Partitionen der Zahl n in genau k Summanden gleich der Zahl der Partitionen der Zahl $n + \binom{k}{2}$ in genau k verschiedene Summanden ist.

Abgabe: Donnerstag, den 14. Dezember 2006 (vor der Vorlesung)
Homepage: http://www.math.uni-sb.de/ag/gekeler/LEHRE/Kombinatorik/KombinatorikWS06.html