Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Klausurtraining

Nachfolgend finden Sie eine Reihe von Aufgaben, die als Training für die kommende Klausur gedacht sind. Sie dürfen alle Resultate der Vorlesung sowie alle Aussagen und Ergebnisse der Übungen verwenden. (Tipp: Stürmen Sie nicht einfach drauf los, sondern überprüfen Sie zuerst, ob Sie die Prinzipien und Aussagen der Vorlesung verstanden haben)

- Sie haben 17 natürliche Zahlen, von denen keine einen Primfaktor größer als 7 hat. Zeigen Sie, dass wenigstens zwei darunter sind, deren Produkt eine Quadratzahl ist.
- Zeigen Sie: Unter 13 paarweise verschiedenen Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$ finden sich stets Mengen A, B, C mit $A \subset B \subset C$.
- Unter 6 natürlichen Zahlen seien keine 3, die paarweise einen ggT größer eins haben. Zeigen Sie: Unter den 6 Zahlen befinden sich 3 paarweise teilerfremde Zahlen.
- Kann man die Menge $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ so in zwei Teilmengen A, B zerlegen, dass keine der beiden Mengen drei Zahlen enthält, deren Summe durch 3 teilbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Beweisen Sie: Für festes $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{n-1 \le j < 2n} \binom{j}{n-1} .$$
- Zählen Sie die 6-stelligen Zahlen, die man aus den Ziffern 1 und 2 bilden kann, bei denen in der Zifferndarstellung wenigstens 3 Einsen direkt aufeinander folgen. Z.B. sind 111221 und 211112 Zahlen, die wir betrachten.
- Zählen Sie die Anzahl der Graphen auf $\mathbb{N}_4$, die ein Dreieck enthalten!
- Was ist die Anzahl der Funktionen $f : \mathbb{N}_7 \to \mathbb{N}_7$ mit $f(f(n)) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_7$?
- Vor Ihnen liegen sechs verschiedene Spielkarten nebeneinander auf dem Tisch. Auf wieviele verschiedene Weisen können Sie die Karten umordnen, so dass wenigstens eine Karte noch auf ihrem ursprünglichen Platz liegt?
- Zeichnen Sie einen zusammenhängenden Graphen dessen Automorphismengruppe $C_2 \times S_3$ bzw. $C_2 \times C_2$ bzw. $S_3 \times S_3$ ist.

- Sie schreiben sich für n aus $\mathbb{N}$ alle Partitionen der Menge $\mathbb{N}_n$ hin und färben bei jeder solchen Zerlegung $\cup A_i$ die Mengen A_i mit "Farben" aus $\{A, B, C\}$. Dabei bestehe die Einschränkung, dass Mengen A_i mit ungerader Ordnung nur mit Farben aus $\{A, B\}$ gefärbt werden dürfen. Es sei $h(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, Ihre Zerlegungen in der obigen Weise zu färben. Geben Sie eine Rekursionsformel für $h(n)$ an!

- Für uns seien zwei 2x2-Matrizen über $\mathbb{F}_3$wesentlich verschieden, falls die eine nicht in die andere überführt werden kann, wenn man eine beliebige endliche Folge von Zeilen-oder Spaltenvertauschungen vornimmt. Benutzen Sie Polya Abzählung um die maximale Anzahl der paarweise wesenlich verschiedenen 2x2-Matrizen über $\mathbb{F}_3$ zu ermitteln. Welche Gruppe operiert auf welcher Menge? Wie sieht der Zyklenzeiger aus? Wie bekommen Sie Ihre gesuchte Anzahl?

Homepage: http://www.math.uni-sb.de/ag/gekeler/LEHRE/
Kombinatorik/KombinatorikWS06.html