

Universität des Saarlandes  
Fachrichtung 6.1, Mathematik  
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler  
M.Sc. Philipp Stopp



## 1. Übung zur Linearen Algebra II, SS 2015

lichtung  
manche meinen  
lechts und links  
kann man nicht  
verwechsellern  
werch ein illtum!  
(Ernst Jandl)

### Aufgabe 1. (10 Punkte)

Für einen Ring  $R$  sei  $Z(R) := \{x \in R \mid \forall y \in R : xy = yx\}$  das Zentrum von  $R$ .

- (i) Zeigen Sie:  $Z(R)$  ist ein Unterring von  $R$ .
- (ii) Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $R := \text{End}_K(V)$  der Ring aller  $K$ -Endomorphismen von  $V$ . Bestimmen Sie  $Z(R)$ .

### Aufgabe 2. (10 Punkte)

Es sei  $R$  ein beliebiger Ring und  $M, N$  seien  $R$ -Moduln.  $\text{Hom}_R(M, N)$  bezeichne die Menge der  $R$ -Modulhomomorphismen vom  $M$  nach  $N$ .

Zeigen Sie:

- (i) Für  $\alpha \in R$  ist die Multiplikationsabbildung

$$\begin{aligned} m_\alpha : M &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \alpha x \end{aligned}$$

ein  $R$ -Modulhomomorphismus von  $M$  nach  $M$ .

- (ii)  $\text{Hom}_R(M, N)$  ist mit argumentweisen Verknüpfungen ein  $R$ -Modul.

### Aufgabe 3. (20 Punkte)

Es sei  $R = \text{End}_K(V)$  der Ring aus Aufgabe 1 und  $U$  ein  $K$ -Untervektorraum von  $V$ .

- (i) Zeigen Sie:  $V$  wird durch die "Skalarmultiplikation"

$$\begin{aligned} R \times V &\longrightarrow V \\ (\phi, x) &\longmapsto \phi(x) \end{aligned}$$

zum  $R$ -Modul.

- (ii) Zeigen Sie:  $V$  besitzt nur die trivialen  $R$ -Untermoduln  $\{0\}$  und  $V$ .
- (iii) Bestimmen Sie die  $R$ -Endomorphismen von  $V$  (d.h. die  $R$ -Modulhomomorphismen von  $V$  nach  $V$ ).

Falls Sie die Aufgaben gelöst haben, haben Sie mindestens zwei falsche Aussagen bewiesen. Welche? Durch welche Korrekturen können Sie die Aussagen (und ihre aufgewendete Mühe) retten?

**Abgabe bis Montag, den 04.05.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen**