



8. Übung zur Linearen Algebra II,  
 SS 2015

**Aufgabe 1.** (5 + 5 = 10 Punkte)

Bestimmen Sie “die” Elementarteilermatrix  $A$  zu  $B \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$  und beschreiben Sie die Restklassengruppe  $\mathbb{Z}^3/N_i$ , wobei  $N_1$  bzw.  $N_2$  von den Spaltenvektoren bzw. den Zeilenvektoren von  $B$  erzeugt wird, mit

$$(i) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(ii) \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Hinweis:* Ist  $\text{rg}(B) = r < n$ , so hat die Elementarteilerform die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & q_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & q_r \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2.** (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Elementarteiler  $q_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ , alle  $q_i$  normiert mit  $q_1 \mid q_2 \mid q_3$  in  $R = \mathbb{Q}[X]$ ) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} X+1 & 2 & -2X-4 \\ 1 & X & -3 \\ 1 & 1 & X-4 \end{pmatrix} \in R^{3 \times 3}.$$

Finden Sie Elemente  $S, T$  von  $\text{GL}(3, R)$ , sodass

$$A = SQT^{-1} \quad \text{mit} \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix}$$

gilt.

**Aufgabe 3.** (10 Punkte)

Finden Sie die Normalform der Matrix  $B \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$  mit

$$B := \begin{pmatrix} 9 & -6 & 12 & -8 \\ 10 & -8 & 14 & -13 \\ -4 & 3 & -5 & 4 \\ -4 & 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4.** (8 + 2 = 10 Punkte)

Es sei  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  der Körper mit  $p$  Elementen und  $G$  die Gruppe  $GL(2, \mathbb{F}_p)$ .

(i) Bestimmen Sie die Zahl der Konjugationsklassen von  $G$ .

(ii) Die Eigenraumstruktur von  $A \in G$  hängt nur von den Konjugationsklassen von  $A$  ab (das brauchen Sie nicht zu zeigen. Unter "Eigenraumstruktur" verstehen wir die Eigenwerte und die zugehörigen geometrischen Vielfachheiten).

Beschreiben Sie für jede Konjugationsklasse die Eigenraumstruktur.

*Hinweis:* Die möglichen  $2 \times 2$ -Matrizen in Normalform bilden ein Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen. Also müssen Sie die möglichen Normalformen abzählen.

Abgabe bis Freitag, den 19.06.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen