



Ergänzung zur Linearen Algebra I, WS 2014/2015

“Beschreibung linearer Abbildungen durch Matrizen;  
 Basiswechsel”

Es sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  eine (numerierte) Basis von  $V$ ,  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  eine Basis von  $W$ .

Die Matrix  $A = A_{f,X,Y} = (\alpha_{i,j}) \in K^{m \times n}$  ist gegeben durch

$$f(x_j) = \sum_{1 \leq i \leq m} \alpha_{i,j} y_i \quad (1 \leq j \leq n).$$

Dies entspricht der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \kappa_X \downarrow & & \downarrow \kappa_Y \\ K^n & \xrightarrow{A} & K^m \end{array}$$

Dabei ordnet  $\kappa_X$  (bzw.  $\kappa_Y$ ) jedem Vektor  $v = \sum \lambda_j x_j$  seine Koordinaten  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$  (bzw. jedem  $w = \sum \mu_i y_i$  seine Koordinaten  $(\mu_1, \dots, \mu_m)^t$ ) zu.

Seien  $X' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ ,  $Y' = \{y'_1, \dots, y'_m\}$  weitere Basen von  $V$  bzw. von  $W$  und  $C = (\gamma_{i,j}) \in K^{n \times n}$ ,  $D \in K^{m \times m}$  die Basiswechsellmatrizen von  $X$  nach  $X'$  bzw. von  $Y$  nach  $Y'$ . Dann ist

$$x'_j = \sum_{1 \leq i \leq n} \gamma_{i,j} x_i \quad (1 \leq j \leq n),$$

d.h.  $C = A_{id,X',X}$  (beachte hier die Reihenfolge!)

und

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \kappa_{X'} \swarrow & & \searrow \kappa_X \\ K^n & \xrightarrow{C} & K^m \end{array}$$

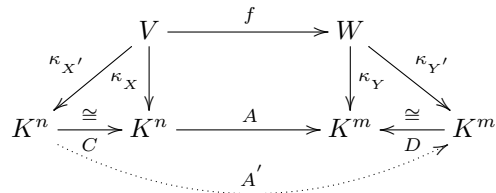
ist kommutativ. Entsprechendes gilt für den Basiswechsel in  $W$  von  $Y$  nach  $Y'$  mittels der Matrix  $D = A_{id,Y',Y}$ .

Der Basiswechselsatz besagt jetzt:

Mit  $A' = A_{f, X', Y'}$  gilt

$$A' = D^{-1}AC,$$

was man durch "Diagrammjagen" im folgenden kommutativen Diagramm einsieht:



Dabei sind  $\kappa_{X'}, \kappa_X, \kappa_Y, \kappa_{Y'}$  Isomorphismen, und  $A'$  beschreibt die wohlbestimmte kommutative Ergänzung entlang des gestrichelten Pfeils.