



3. Übung zur Linearen Algebra I, WS 2014/2015

Aufgabe 1. (10 = 5 · 1 + 2 + 3 Punkte)

Es sei $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ der Körper der komplexen Zahlen.

(i) Berechnen Sie (d.h. stellen Sie in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar):

- $(2 + 3i)(-1 + 4i)$,
- $\frac{1-i}{2+3i}$,
- $(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})^3$,
- i^n ($n \in \mathbb{Z}$),
- $(1 + i)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

(ii) Lösen Sie über \mathbb{C} die Gleichungen

- $x^2 - 2x + 2 = 0$,
- $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$.

Aufgabe 2. (10 = 2 + 3 + 5 Punkte)

Zu $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) sei $\bar{z} = a - bi$ das *Komplex-Konjugierte* zu z .

Zeigen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$:

- (i) $\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{(z \cdot w)} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
(ii) Für $N(z) := z \cdot \bar{z}$ gelten $N(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und

$$N(z \cdot w) = N(z)N(w).$$

(iii) Für $|z| := \sqrt{N(z)}$ ist stets $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Aufgabe 3. (10 = 5 · 2 Punkte)

Es sei V die Menge der Abbildungen $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (dabei ist $[0; 1]$ das reelle Einheitsintervall $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$).

Zeigen Sie:

(i) V ist bzgl. argumentweiser Verknüpfungen ein \mathbb{R} -Vektorraum.

Welche der folgenden Teilmengen U von V sind Untervektorräume?

- (ii) $U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$,
(iii) $U := \{f \in V \mid f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{6}) = 0\}$,
(iv) $U := \{f \in V \mid f(0) + f(1) + f(\frac{1}{2}) = 1\}$,
(v) $U := \{f \in V \mid f(0)^2 - f(1)^2 = 0\}$,

Finden Sie eine Regel!

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Es sei

$$X := \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Welche Teilmengen von X sind linear unabhängig?

Hinweis: Zur Bearbeitung dieser Aufgabe gehört jeweils auch eine Begründung, warum die angegebenen Mengen linear unabhängig und die nicht angegebenen Mengen linear abhängig sind.

Abgabe bis Freitag, den 21.11.2014 vor der Vorlesung in die Briefkästen

Übungsblatt 3:

Wieviel Zeit in Minuten haben Sie für die Bearbeitung dieses Blattes gebraucht?

[] *min*