Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Probeklausur
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler I (WS 07/08)

Hinweise:
In der regulären Klausur würde insbesondere gelten:

- Sie haben 3 Stunden Bearbeitungszeit für die Klausur.
- Es gibt insgesamt 8 Aufgaben, von denen nur die 6 besten bearbeiteten Aufgaben gewertet werden. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben (insbesondere können Sie also höchstens 60 Punkte erreichen).
- Als Hilfsmittel ist lediglich ein handbeschriebenes Din A4 Blatt zugelassen (insbesondere also kein (!) Taschenrechner).
- Ein eingeschaltetes Handy, oder Abschreiben beim Nachbarn führen zum vorzeitigen Ende Ihrer Klausur und zur Bewertung mit 0 Punkten.

Aufgabe 1. *(10 = (3+4) + 3 Punkte)*

a) Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to (0,\infty), (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2 + 2y^2}.$$

i) Untersuchen Sie f auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität (Begründung !).

ii) Bestimmen Sie die Menge $(f^{-1}(\frac{1}{3}) \cup f^{-1}(\frac{1}{11})) \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ explizit, d.h. durch Angabe all ihrer Elemente.

b) Begründen Sie mit Hilfe von Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) = n^2.$$

Aufgabe 2. *(10 = (1+1+2+2) + (1+1+2) Punkte)*

a) Drücken Sie die folgenden komplexen Zahlen z als $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ aus:

$$(5+i)(2+4i), \qquad \frac{5i}{2+i}, \qquad e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad (1 + e^{i\frac{\pi}{2}})^8 .$$

b) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen z in der Form $z = re^{i\phi}$ mit $r > 0$ und $0 \leq \phi < 2\pi$:

$$-7i, \qquad 2^i, \qquad 1 - \sqrt{3}i\,.$$

Aufgabe 3. *(10 = 2 + 3 + 5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die komplexe Zahl $z = a + bi$

$$z^2 = -3 + 4i$$

erfüllt.

b) Finden Sie alle komplexen Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit

$$w^2 + 2w + 5 = 0.$$

c) Finden Sie alle komplexen Lösungen z von

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0.$$

Aufgabe 4. *(10 = (2 + 2 + 3) + 3 Punkte)*

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfülle für $n \in \mathbb{N}$

i) $a_n = n^{1-\frac{1}{n}}$,

ii) $a_n = \frac{1+n^3}{\pi n^2+2n^3}$,

iii) $0 \leq n \cdot a_n \leq \sqrt{n} + 1$.

In welchen Fällen konvergiert (a_n), in welchen nicht (Begründung!)? Berechnen Sie im Falle der Konvergenz auch die Grenzwerte.

b) Berechnen Sie den Grenzwert der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{3n} \frac{1}{2^{2n}}\ .$$

Aufgabe 5. *(10 = (1+2+2) + (1+2+2) Punkte)*

a) Betrachten Sie die Funktion $f(x) := \arctan(x)$ und ihren Graphen.

i) Wie lautet der Wertebereich und der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ von f?

ii) Für welche $x \in D$ ist die Tangentensteigung maximal?

iii) Gibt es Punkte $x \in D$ mit minimaler Tangentensteigung?

b) Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin^2(x).$$

Bestimmen Sie

i) die Nullstellen,

ii) die Punkte mit Tangentensteigung 0, sowie die Maxima und Minima,

iii) die Wendepunkte und die Steigung der Tangenten in den Wendepunkten

von g.

Aufgabe 6. *(10 = 4 + 6 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion $f(x) := \sin(2x)$ um $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

b) Jeder Punkt $t \in (1,3)$ legt ein Rechteck R_t in der Ebene fest, dessen linke untere Ecke der Punkt $(t,0)$ ist, dessen rechte untere Ecke ebenfalls auf der $x-$Achse liegt und dessen verbleibende Ecken auf dem Graphen der Parabel $f(x) = -(x-1)(x-5)$ liegen. Wann ist der Flächeninhalt von R_t maximal?

Aufgabe 7. *(10 = 3 + 3 + 4 Punkte)* Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^a (2x+5)^{10} dx$ ($a > 0$ fest),

b) $\int_1^{e^\pi} 2 \cdot \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx$,

c) $\int_2^e (xe^x - x^2) dx$.

Aufgabe 8. *(10 = 6 + 4 Punkte)*

a) Gegeben seien die Punkte $\underline{x}^{(1)} := (1,1,2), \underline{x}^{(2)} := (3,1,2), \underline{x}^{(3)} := (3, 1+2\sqrt{3}, 2)$ in $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Seitenlängen und Innenwinkel des Dreiecks, welches durch die gegebenen Punkte definiert wird.

b) Berechnen Sie die beiden Schnittpunkte $\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^2$ der Geraden $g = \{t(1,2) + (0,-1) | t \in \mathbb{R}\}$ mit dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - x + 1$.