Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 1
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler I (WS 07/08)

Aufgabe 1. *(10 = 4+6 Punkte)*

a) Prof. Van Dusen hilft der Polizei mal wieder bei einem schier unlösbaren Mordfall. Schon nach kurzer Zeit der Ermittlung lässt er die Personen A,B,C festnehmen und zum Verhör bringen. Nach diesem Verhör, bei dem auch wie so oft sein Assistent Hatch anwesend war, stellt van Dusen folgendes fest: “Mein lieber Hatch, es ist nun klar, dass

- Schuldige nur unter den Personen A, B, C zu suchen sind.
- Ferner ist klar, dass falls A schuldig ist oder B schuldig ist, das Alibi von C echt ist.
- Ist B schuldig, so muss auch C schuldig sein.
- A kann außerdem den Mord nicht alleine begangen haben.

Damit ist nun sicher, wer der bzw. die Täter sind, nicht wahr Hatch?” Können Sie dem nun verwirrt aussehenden Hatch weiterhelfen? Wer ist der Schuldige bzw. sind die Schuldigen?

b) Machen Sie die folgenden wohlbekannten Regeln für das Rechnen mit Mengen plausibel, indem Sie die Mengen skizzieren und gemeinsame Bereiche schraffieren:

i) $(M \cap N) \cup C = (M \cup C) \cap (N \cup C)$,
ii) $(M \cup N) \cap C = (M \cap C) \cup (N \cap C)$,
iii) $C \setminus (M \cup N) = (C \setminus M) \cap (C \setminus N)$.

Zeichnen Sie M, N, C so, dass keine zwei der Mengen einen leeren Schnitt haben und dass keine in einer anderen enthalten ist. Der Übersichtlichkeit wegen können Sie so vorgehen: Zeichnen Sie für jede Seite einer Gleichung ein Bild (dabei sollten Sie natürlich die Lage Ihrer Mengen zueinander und ihre Form in etwa beibehalten). Schraffieren Sie dann zunächst die Mengen innerhalb der Klammern in einer Weise und dann das eigentliche Resultat in einer anderen Weise.

Aufgabe 2. *(5+5+5+5 = 20 Punkte)* Gegeben seien die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- $M_1 := \{(x, y)|x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 \leq 25\}$,
- $M_2 := \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}, x + y \geq 5\}$,
- $M_3 := \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}, y < (x - 1)^2 - 3\}$.

Bestimmen Sie die endlichen Mengen

- $M_1 \setminus (M_3 \cup ([0, 5] \times [0, 5]))$,
- $(M_1 \cap ([0, 4] \times [1, 3])) \setminus M_2$,
- $(M_1 \cap M_3) \cap ([2, 3] \times \mathbb{R})$,
- $(M_1 \cap M_3 \cap ([0, 2] \times [-4, -2])) \cup (M_1 \cap M_2)$

explizit, d.h. durch Aufzählung der entsprechenden Punkte im $\mathbb{R}^2$.
(Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Mengen auf kariertem Papier)

Aufgabe 3. *(5+5 = 10 Punkte)* . Finden Sie jeweils zu den gegebenen Mengen X, Y und Vorschriften f die maximale Teilmenge D_f von X, so dass

$$\begin{aligned} f : D_f &\rightarrow Y, \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

eine Abbildung wird:

a) $X := \{x :\in \mathbb{R}|x > -10\}, Y := \{y \in \mathbb{R}|y \geq 1\}, f(x) := \frac{1}{1-|x|}$,

b) $X := \mathbb{Z}, Y := 5\mathbb{Z} := \{5 \cdot m|m \in \mathbb{Z}\}$,$f(x) := \frac{x-1}{3}$.

Abgabe: Freitag den 02.11.2007 (vor der Vorlesung)