Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 6
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler I (WS 07/08)

Aufgabe 1. *(20 = 3+3+3+3+4+4 Punkte)* Untersuchen Sie die anschließend beschriebenen Folgen (a_n) auf Konvergenz bzw. uneigentliche Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte bzw. uneigentlichen Grenzwerte: Für $n \in \mathbb{N}$ erfülle a_n

a) $a_n = \frac{1+n}{n^2+2}$,

b) $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n+1}$,

c) $a_n = \frac{4^n}{2^n+3^n}$,

d) $a_n = 1 + \frac{(-2)^n + \sin(1/n)}{3^n}$,

e) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$,

f) $1 - \frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{n+3}{n+2}$.

[Hinweis zu e): Schreiben Sie das n in der Basis als Potenz von 2 und begründen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(n)}{n} = 0$.]

Aufgabe 2. *(20 = 6+1+3+2+2+2+4 Punkte)*

a) Es sei $M \subset \mathbb{R}$. Versuchen Sie eine Definition für "∞ (bzw. $-\infty$) ist Berührpunkt von M" zu finden. Finden Sie ein M, welches genau 3 Berührpunkte in $\mathbb{R}\backslash M$ besitzt und nach Ihrer Definition genau einen aus $\{-\infty, \infty\}$!

b) Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben und a ein Berührpunkt von D. Definieren Sie nochmals, was $\lim_{x\to a} f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ oder $c \in \{-\infty, \infty\}$ bedeutet. Gehen Sie auch auf die Limesbildungen "$\lim_{x\nearrow a}$" und "$\lim_{x\searrow a}$" ein!

c) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$. Existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$?

[Hinweis: Finden Sie zwei konvergente Folgen $(a_n), (b_n)$ aus $\mathbb{R} - \{0\}$, die gegen 0 konvergieren und so dass $\sin(a_n) \to 0$ und $\sin(b_n) \to 1$ für $n \to \infty$ gilt.]

d) Im Folgenden sehen Sie Limites von Funktionen aufgelistet. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktionen an und untersuchen sie die Limites bzw. uneigentlichen Limites auf Existenz! Im Falle der Existenz: Was sind die Grenzwerte bzw. uneigentlichen Grenzwerte?

$$\text{i)} \lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 7x + 1}{2x^4}, \qquad \text{ii)} \lim_{x\searrow 0} e^{-\frac{1}{x}}, \qquad \text{iii)} \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}.$$

e) Folgern Sie durch rein geometrische Betrachtungen am Einheitskreis $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ für $x \to 0$.

Abgabe: Freitag den 7.12.2007 (vor der Vorlesung)