Es seien $D \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\underline{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, $\underline{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$.

Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} \text{ ein Vektorfeld,} \\ \mathrm{rot} \underline{g} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \text{ ein Vektorfeld,} \\ \mathrm{div} \underline{g} &= \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \text{ eine Funktion.} \end{aligned}$$

Sind f, f_1 und f_2 Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ und $\underline{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, alle zweimal stetig partiell differenzierbar, so gelten

(i) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \underline{0}$, d.h. das Nullfeld

(ii) $\mathrm{div}(\mathrm{rot} \underline{g}) = 0$, d.h. die Nullfunktion

(iii) $\mathrm{grad}(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot \mathrm{grad} f_2 + f_2 \cdot \mathrm{grad} f_1$

(iv) $\mathrm{rot}(f \cdot \underline{g}) = (\mathrm{grad} f) \times \underline{g} + f \cdot (\mathrm{rot} \underline{g})$

(v) $\mathrm{div}(f \cdot \underline{g}) = f \cdot \mathrm{div} \underline{g} + \langle \mathrm{grad} f, \underline{g} \rangle$.

Die drei Operatoren grad, rot und div sind eine Art Ableitungen, und zwar macht

grad:	Funktionen zu Vektorfeldern
rot:	Vektorfelder zu Vektorfeldern
div:	Vektorfelder zu Funktionen.

Die Regeln (iii), (iv) und (v) sind “Produktregeln”; ihre Form ist (“Ableitung” ist eines von grad, rot, div):
Ableitung (Produkt) = erster Faktor mal Ableitung des zweiten Faktors + Ableitung des ersten Faktors mal zweiter Faktor.
Die rechts auftretenden “Ableitungen” sind wieder grad, rot oder div; welches davon auftritt, ist vollständig durch die Syntax bestimmt (ob das Argument skalarwertig oder vektorwertig ist, und ob das Ergebnis skalar- oder vektorwertig sein soll). Für “mal” ist eines der vier Produkte

(Skalar mal Skalar	=	Skalar
Skalar mal Vektor	=	Vektor
Vektor mal Vektor	=	Skalar
Vektor mal Vektor	=	Vektor)

einzusetzen, und zwar das eindeutig bestimmte, dessen Syntax zur Situation passt.