Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übung 2
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Aufgabe 1. *(20 Punkte)* Wir betrachten die Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die zu A und B inversen Matrizen A^{-1} und B^{-1}.
Überführen Sie dazu jeweils die gegebene Matrix mit elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E_3 und wenden Sie parallel dazu dieselben Umformungen, beginnend mit der Matrix E_3, an. Die dabei resultierende Matrix entspricht dann der gesuchten Inversen.

b) Versuchen Sie das gleiche Verfahren, um die Inverse C^{-1} der Matrix C zu bestimmen. Was fällt auf? Wie erklären Sie sich dies?

Aufgabe 2. *(20 Punkte)* Seien die Vektoren $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Wir betrachten weiterhin die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -3 & -10 & -3 \\ 8 & 32 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und die lineare Abbildung

$$\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; \underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x}.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix S von der Standardbasis $\mathcal{E}_3 = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ zur Basis $\mathcal{B}$ und die Darstellungsmatrix D von φ_A bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.
Drücken Sie den Zusammenhang zwischen A, S und D durch eine Formel aus.
Was ist $\varphi_A(\underline{b}_j)$ für $j = 1, 2, 3$?

Abgabe: Dienstag den 06.05.08 (vor der Vorlesung)