Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übung 3
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Aufgabe 1. *(10 Punkte)* Wir betrachten den Vektorraum V der ganzrationalen Funktionen vom Grad ≤ 4 mit der Basis

$$\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3, X^4\right).$$

Begründen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : V \to V,\ p \mapsto p'$$

linear ist und berechnen Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ von φ.
Bestimmen Sie ohne explizite Berechnung die Matrix A^5. (Hinweis: Betrachten Sie die 5-malige Hintereinanderausführung $\varphi^5 : V \to V$ der Abbildung φ.)

Aufgabe 2. *(10 Punkte)* Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -23 & 12 \\ -42 & 22 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Bestimmen Sie A^{2008}.
Hinweis: Diagonalisieren Sie zunächst die Matrix A.
Es ergeben sich Ausdrücke der Form $a \cdot 2^b + c$ mit ganzen Zahlen a, b, c. Diese Ausdrücke brauchen Sie nicht weiter zu vereinfachen.

Aufgabe 3. *(20 Punkte)* Wir betrachten die quadratische Form

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q(\underline{x}) = \underline{x}^t \cdot A \cdot \underline{x}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$ des $\mathbb{R}^3$, so dass die Darstellungsmatrix von q bezüglich $\mathcal{B}$ eine Diagonalmatrix ist.
Verändern Sie die Basis $\mathcal{B}$ zu einer weiteren Basis $\mathcal{B}' = (\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \underline{b}'_3)$, so dass die Darstellungsmatrix von q bezüglich $\mathcal{B}'$ die Einheitsmatrix ist.
Kann man zu jeder beliebigen (durch eine symmetrische Matrix gegebenen) quadratischen Form $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Basis $\mathcal{B}$ finden, so dass die Darstellungsmatrix von q bezüglich $\mathcal{B}$ die Einheitsmatrix ist ?

Abgabe: Dienstag den 13.05.08 (vor der Vorlesung)